This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

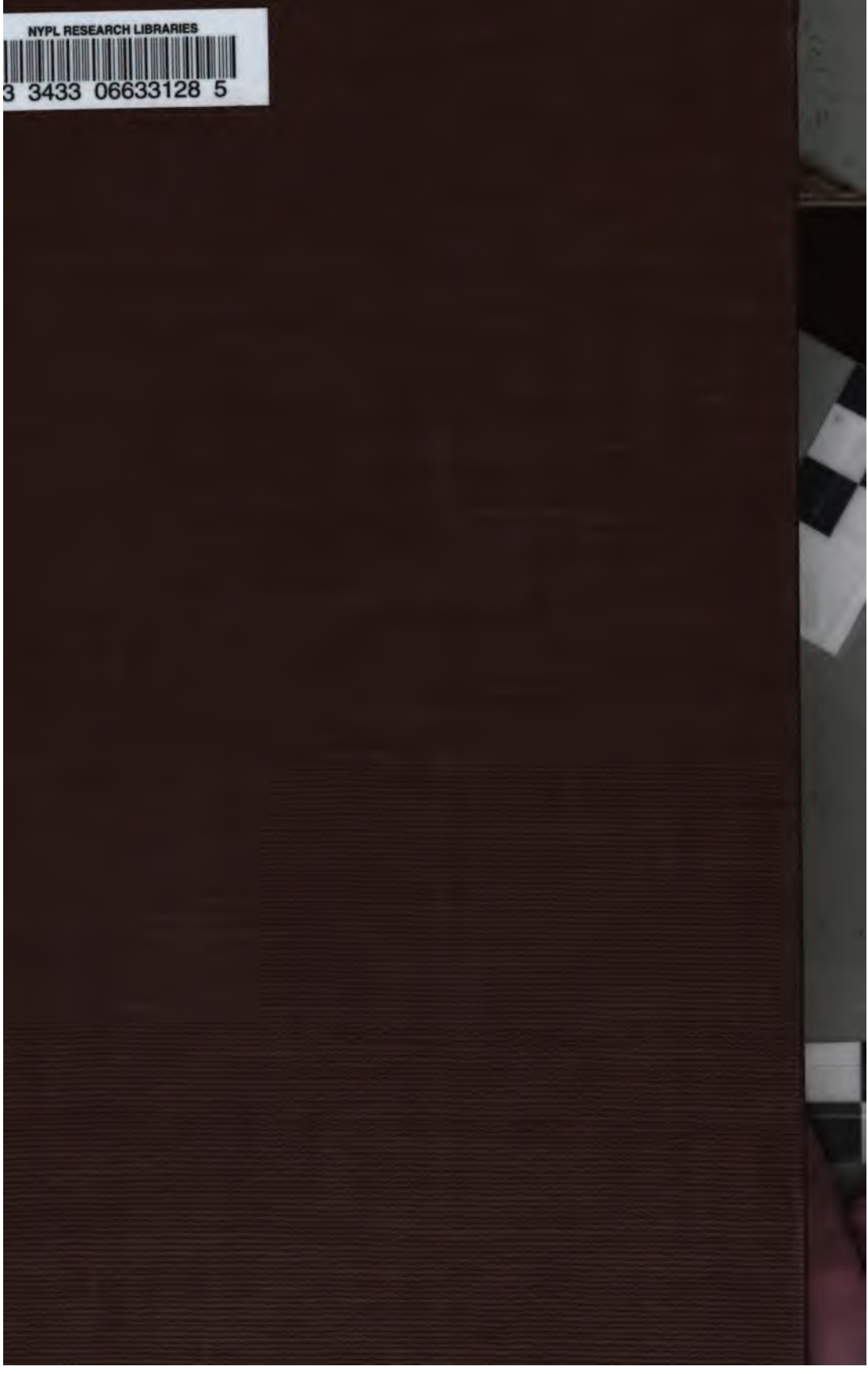
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06633128 5

PHC
MASCP

TRAITÉ

D'ÉLECTRICITÉ STATIQUE

TRAITÉ

D'ÉLECTRICITÉ STATIQUE

Droit de traduction réservé.

Typographie Lahure, rue de Fleurus, 9, à Paris.

TRAITÉ

D'ÉLECTRICITÉ STATIQUE

PAR

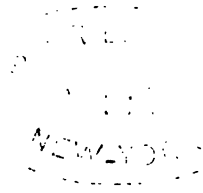
Eleuthère Elie Nicolas
M. E. MASCART

PROFESSEUR DE PHYSIQUE AU COLLÉGE DE FRANCE

TOME PREMIER

PARIS
G. MASSON, ÉDITEUR
LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
PLACE DE L'ÉCOLE-DE-MÉDECINE, 17

1876



PRÉFACE

Je dois au lecteur quelques explications sur la nature des matières qui sont traitées dans cet ouvrage et sur le choix du titre auquel je me suis arrêté. Si l'on s'en tenait à la signification rigoureuse des termes, un Traité d'Électricité statique ne devrait comprendre que les conditions d'équilibre des corps électrisés, ou, plus généralement, l'étude des phénomènes dans lesquels l'agent électrique ne donne lieu à aucun travail ni à aucun effet calorifique équivalent, et se réduirait aux conséquences mathématiques de la loi de Coulomb. Le cadre que je me suis proposé de remplir est beaucoup moins restreint et, pour mieux préciser le caractère des questions qu'il renferme, il est nécessaire d'examiner rapidement la manière dont s'est développée la science de l'électricité.

Cette science est toute moderne; malgré quelques faits connus des anciens, son origine est réellement marquée au commencement du dix-septième siècle par les travaux de Gilbert. A partir de ce moment, les découvertes se succèdent très-rapidement, mais restent longtemps sans aucun lien méthodique. L'ordre s'établit peu à peu pendant le dix-huitième siècle : les idées générales apparaissent, permettant de mieux interpréter les anciennes

expériences et en provoquant de nouvelles. C'est ainsi qu'on découvre successivement la conductibilité électrique, les deux manières d'électriser les corps, la production simultanée des deux électricités, la condensation et l'influence. Une théorie générale rattachant l'ensemble des faits connus à un petit nombre d'hypothèses commence à devenir possible et, après les admirables travaux de Coulomb, on pouvait même croire que cette science était constituée d'une manière définitive. Les phénomènes étaient réglés par les mêmes lois que l'attraction universelle et les problèmes à résoudre ne devaient présenter dans la pratique que des difficultés d'analyse : les mémoires de Poisson relatifs à la distribution de l'électricité sur deux sphères voisines furent le plus bel exemple de ce genre de calculs.

Toutefois, il restait à faire un pas important pour envisager l'électricité sous son véritable aspect, et ici encore l'expérience, entre les mains d'un homme de génie, devança de longtemps la théorie. En même temps que Coulomb déterminait les lois élémentaires des actions électriques, Volta mettait en évidence une propriété importante qu'il appela la *tension électrique*, propriété qu'il ne put rattacher par le calcul à aucune loi simple, mais qui lui permit de déterminer les capacités électriques des corps, la force condensante et l'état électrique de l'air, sans que, dans ces différentes applications, on puisse signaler aucune erreur d'interprétation.

Ces travaux de Volta auraient suffi à immortaliser son nom, si la découverte de la pile, qui n'était que le développement et la généralisation de ses premières idées, n'avait trop fait oublier le point de départ. La notion nouvelle de tension électrique, que Volta ne pouvait défi-

nir autrement qu'une tendance de l'électricité à marcher dans une certaine direction, est restée confuse et souvent mal interprétée, jusqu'à ce que les mathématiciens en eussent donné une définition précise, déduite des lois mêmes de Coulomb, et en eussent montré les principales propriétés. Mais, à ce moment, l'attention des physiciens était ailleurs : les travaux d'Œrstedt et d'Ampère sur l'électro-magnétisme et l'électro-dynamique, la découverte inattendue de l'induction par Faraday, avaient fait connaître des phénomènes que l'on ne pouvait plus expliquer par le principe de Volta ; les expérimentateurs furent entraînés dans une autre voie plus féconde et le Mémoire de Georges Green resta entièrement méconnu, même en Angleterre. Il fallut enfin que la théorie mécanique de la chaleur, établissant une corrélation entre les phénomènes physiques par le principe général de la conservation du travail sous toutes ses formes, amenât la révision complète et la coordination des phénomènes électriques ; pour qu'ils apparussent sous un jour tout nouveau.

Si l'on voulait définir par un mot l'esprit de cet ouvrage, on pourrait dire que c'est l'étude de la tension de Volta, ou du potentiel, comme l'ont appelée les mathématiciens, des propriétés de cette fonction et de toutes les circonstances qui font naître entre deux corps une différence de tension ou de potentiel. Un titre rappelant ce caractère aurait pu manquer de simplicité et de clarté ; j'ai préféré celui d'électricité statique, pour indiquer que c'est une première étude des phénomènes électriques, et me réserver plus de latitude dans le choix des matières.

J'ai consulté autant que possible les mémoires originaux et j'ai indiqué la plupart des sources au moyen de renvois nombreux. Je ne me suis pas proposé de faire un histori-

que complet sur chaque question ni de citer tous les physiciens qui ont contribué aux progrès de la science, mais j'ai cherché à rendre justice aux savants qui ont introduit quelque idée ou quelque méthode nouvelle. Si je n'ai pas réussi dans cette tâche difficile, j'espère au moins qu'on ne trouvera dans cet ouvrage aucun parti pris d'exclusion ni de critique malveillante.

Parmi les ouvrages spéciaux qui m'ont été le plus utiles, je citerai les *Leçons d'Électricité statique* de M. Riess, et surtout les mémoires remarquables réunis par M. William Thomson sous le titre de *Papers on Electrostatics and Magnetism*. Pour la partie mathématique, j'ai eu recours en particulier à la *Théorie mécanique de la chaleur* de M. Briot et aux excellentes leçons professées par M. Bertrand au Collége de France.

TRAITÉ

D'ÉLECTRICITÉ STATIQUE

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

1. **Des phénomènes électriques. — Attractions et répulsions.** — Le phénomène électrique le plus anciennement connu est l'attraction des corps légers. Quand on frotte avec la main ou avec un morceau de drap un bâton de verre et qu'on l'approche ensuite de corps légers, tels que des fragments de papier ou de barbe de plumes, on voit ces corps légers se précipiter sur le verre, y rester attachés pendant un temps plus ou moins long et s'en écarter ensuite. Le corps qui jouit ainsi de la propriété d'attirer les corps légers est dit *électrisé*, et l'on donne le nom d'*électricité* à la cause de ces phénomènes. Cette propriété n'est pas permanente; les corps qui l'ont acquise la perdent peu à peu et elle finit par disparaître complétement.

Pendant longtemps l'ambre jaune, dont le nom grec est ἤλεκτρον et le jayet furent à peu près les seuls corps dont on ait connu les propriétés électriques, et c'est là l'origine du nom qui a été donné à la science de l'électricité. Les anciens citent encore une autre substance, le lyncurium, qui attire aussi les corps légers et même des parcelles métalliques; mais la nature de la substance désignée sous ce nom n'est pas bien connue, et quelques auteurs ont cru, d'après la description de Théo-

phraste, que le lyncurium était une tourmaline, dont nous verrons plus loin les propriétés particulières (1).

2. L'histoire de l'électricité ne date véritablement que de recherches beaucoup plus récentes. Gilbert (2), médecin à Londres, a publié dans un ouvrage sur l'aimant un grand nombre d'expériences électriques. Il a constaté que la propriété d'attirer les corps légers peut être donnée par le frottement à un assez grand nombre de corps : des pierres précieuses, telles que le *diamant*, le *saphir*, le *rubis*, l'*améthyste*, l'*opale*, l'*aigue-marine* et le *cristal de roche;* et, à beaucoup d'autres substances plus communes : le *soufre*, la *gomme laque*, la *résine*, le *sel gemme*, l'*alun de roche*, le *verre* et toutes les matières vitrifiées. Il a reconnu que les corps électrisés attirent non-seulement des morceaux de papiers et des barbes de plume, mais encore des fragments de corps quelconques solides, bois, pierres, minéraux, métaux, et même des gouttelettes liquides et des fumées épaisses. Gilbert employait, pour constater l'état électrique d'un corps, des baguettes longues et minces de métal ou d'autres substances suspendues sur une pointe comme les aiguilles aimantées. Quand il approchait d'une des extrémités de cette aiguille un corps préalablement frotté, l'aiguille était déviée pour peu que le corps fût doué de la vertu électrique. Il a observé aussi que le frottement le plus efficace est celui qui est vif et léger; qu'un air humide ou un vent du Sud diminue beaucoup les apparences électriques, tandis que les phénomènes sont plus marqués quand l'air est sec et que le vent souffle du Nord ou de l'Est, et qu'alors la vertu électrique peut se conserver plus longtemps, dix minutes même après que le corps a été frotté. Toutefois, Gilbert n'a pas remarqué que l'attraction est réciproque et que le corps électrisé est attiré aussi bien que celui qui ne l'a pas été. Enfin, on peut s'étonner qu'après avoir réalisé tant d'expériences nouvelles, il n'ait pas découvert le phénomène de la répulsion électrique (3).

(1) Voir *La foudre, l'électricité et le magnétisme chez les anciens*, par M. Th. Henri Martin. (Paris, 1866.)

(2) *De magnete, magneticisque corporibus.* (Londres, 1600.)

(3) Voir l'*Histoire de l'électricité*, de J. Priestley, ouvrage excellent malgré la partialité non dissimulée de l'auteur en faveur de ses compatriotes. — Une traduction française a été publiée en 1771, sans nom d'auteur, et des notes

Les physiciens qui vinrent après Gilbert ne se sont guère attachés qu'à augmenter le nombre des substances électriques sans ajouter aucun phénomène nouveau. Boyle reconnut qu'un corps électrisé est attiré par un autre à l'état naturel; qu'un corps léger comme une barbe de plume, après avoir été attiré par un corps électrisé, s'attachait ensuite à ses mains, et que l'air n'est pas nécessaire au phénomène d'attraction puisqu'elle s'exerce aussi bien dans un vase où l'on a fait le vide (1).

3. Otto de Guericke (2) obtint des effets électriques beaucoup plus énergiques. Il monta sur un axe un globe de soufre de la grosseur d'une tête d'enfant, obtenu en fondant le soufre dans un ballon de verre que l'on brisait ensuite. L'appareil étant porté par des montants en bois, on frottait le globe avec la main pendant que l'axe était animé d'un mouvement rapide de rotation, au moyen d'une manivelle. Ce globe était alors fortement électrisé; on l'enlevait par l'axe et l'on se servait du globe lui-même pour produire les expériences. Otto de Guericke découvrit qu'un corps une fois attiré par le globe électrisé, en était ensuite repoussé et n'était plus attiré de nouveau jusqu'à ce qu'il eût touché un autre corps. Il put ainsi soutenir pendant longtemps une plume suspendue en l'air, et il observa que si l'on approchait de cette plume un fil de lin ou la flamme d'une chandelle, la plume retournait aussitôt au globe sans avoir rien touché. C'était déjà en germe la propriété des points et des flammes. Il observa encore que les fils suspendus à une petite distance de son globe et attirés par lui étaient repoussés par son doigt, mais il ne tira point parti de cette expérience qui renfermait le principe de l'influence électrique.

Enfin, Otto de Guericke observa le premier le bruit et la lumière de l'étincelle électrique (3), mais les effets qu'il obtint paraissent avoir été très-faibles. Lorsque le globe était frotté dans un

nombreuses y sont consacrées pour la plupart à la défense des opinions de l'abbé Nollet.

(1) *Boyle's Works*, t. IV, p. 352. [Édition en 6 vol. London, 1772.]

(2) *Experimenta Magdeburgica*, lib. IV, c. 15.

(3) M. Martin (*loc. cit.*, p. 234), cite cependant des observations d'étincelles électriques dans l'antiquité : le cheval d'un patrice romain et un âne de Tibère émettaient des étincelles quand on les frottait; Valamir, compagnon d'Attila, voyait partir des étincelles de ses vêtements quand il les prenait ou les quittait et ces étincelles faisaient quelquefois entendre un petit bruit, etc.

lieu obscur, il devenait entièrement lumineux, avec un éclat comparable à la phosphorescence du sucre broyé dans l'obscurité, et il fallait tenir l'oreille tout près du globe pour entendre le bruissement des étincelles.

Le docteur Wall [1] parvint à produire avec l'ambre, le diamant et la gomme laque, des craquements plus forts et des étincelles plus brillantes, et ces phénomènes l'ont tellement frappé qu'il ajoute : « Cette lumière et ce craquement paraissent en quelque sorte représenter le tonnerre et l'éclair. »

Otto de Guericke s'aperçut aussi que la vertu électrique excitée dans un corps par le frottement peut se transmettre par le simple contact à d'autre corps qu'on n'a pas frottés directement, et il vit même cette propriété se transmettre à une corde de chanvre jusqu'à la distance d'une aune; mais cette observation ne fut pas poussée plus loin, et la véritable découverte de la conductibilité électrique fut encore retardée d'un demi-siècle.

4. Vers la même époque, Hauksbée [2] publia un grand nombre d'expériences fort curieuses. Il remarqua d'abord la grande puissance électrique du verre, substitua au globe d'Otto de Guericke soit un globe de verre, soit un cylindre de verre, et obtint des phénomènes beaucoup plus éclatants ; c'est depuis Hauksbée que l'emploi du verre en électricité est devenu général. Hauksbée a observé plusieurs phénomènes qui se rapportent à l'électrisation par influence, et qui n'ont été bien compris que beaucoup plus tard. Ainsi, ayant approché d'un globe électrisé un cerceau de fil de fer auquel étaient attachés des fils de lin, il vit tous les fils se diriger vers le centre du globe, et quand on approchait la main assez près de ces fils, ils en étaient repoussés. Si les fils étaient, au contraire, placés dans l'intérieur d'un globe en verre creux et attachés à l'axe, ils divergeaient dans tous les sens quand le globe était électrisé. Les expériences les plus remarquables d'Hauksbée sont relatives aux phénomènes qui se produisent dans les gaz raréfiés ou dans le vide barométrique. En secouant du mercure dans un tube de verre vide d'air, il observa une grande quantité de lumière, avec des éclats singuliers qui semblaient s'élancer

(1) *Philosophical transactions abridged*, vol. V, p. 409 (1708), [édition de 1809].
(2) *Physico-mechanical experiments* (1709). Une traduction française par De Bremond a été publiée en 1754.

dans différentes directions tant que le mercure était en mouvement ; il n'est même pas nécessaire que la pression du gaz restant soit très-faible pour que le phénomène se manifeste.

Il fit tourner rapidement avec une machine un globe de verre creux dans lequel il avait fait le vide et remarqua qu'en appliquant la main sur le globe, il se produisait dans l'intérieur du globe une quantité de lumière considérable d'une belle couleur pourpre. La lumière augmentait chaque fois qu'on changeait la main de place, et elle pouvait être assez éclatante pour permettre de lire de gros caractères : le phénomène s'affaiblissait peu à peu à mesure qu'on laissait rentrer l'air dans ce globe. Le frottement direct du globe vide n'est même pas nécessaire : Hauksbée plaça à la distance d'un peu moins d'un pouce l'un de l'autre deux globes de verre de neuf pouces de diamètre dont l'un était purgé d'air, et tous deux furent animés séparément d'un mouvement de rotation. Quand on appliquait la main sur le globe plein d'air, l'autre se remplissait de lueurs pourpres qui cessaient aussitôt que le globe vide était en repos. Il suffit même de déplacer un vase de verre renfermant un gaz raréfié dans le voisinage d'un corps électrisé pour obtenir ces lueurs électriques. Une autre expérience plus complexe consistait à placer l'un dans l'autre deux cylindres de verre pouvant être mis en mouvement d'une manière indépendante. Le cylindre intérieur étant purgé d'air, quand on appliquait la main sur la surface du cylindre extérieur en mouvement, il se produisait des lueurs dans le gaz raréfié que le cylindre intérieur fût ou non lui-même en mouvement. Ces lueurs ne disparaissaient pas complétement quand l'appareil était en repos, et pendant quelque temps il suffisait d'approcher la main du cylindre extérieur pour faire réapparaître des éclats de lumière pareils à des éclairs. Hauksbée fit encore beaucoup d'autres expériences sur la production de ces lueurs par le frottement de deux corps dans le vide, sur les modifications qu'elles éprouvent d'après la nature des corps employés, etc., mais ces phénomènes étaient trop complexes pour servir beaucoup à cette époque aux progrès dans la science. La machine à globe ou à cylindre de verre fut même abandonnée et on en revint pour longtemps encore au frottement à la main des tubes de verre.

5. **Conductibilité électrique.** — Quelques années plus tard, un autre physicien anglais, Stephen Gray, après avoir ajouté, comme ses devanciers, un certain nombre de corps nouveaux, tels que les *plumes*, les *poils*, la *toile*, la *laine*, le *papier*, le *cuir*, le *bois*, le *parchemin*, la *baudruche* (1) à la liste des corps électriques, c'est-à-dire de ceux que l'on peut électriser par le frottement, fut mis sur la voie d'une découverte importante. Ayant essayé d'électriser directement les métaux sans y réussir, il se souvint qu'un tube de verre électrisé dans l'obscurité et devenu lumineux, communique sa lueur à différents corps avec lesquels on le met en contact, et il jugea que ce verre pouvait bien aussi leur communiquer sa vertu électrique. Il prit donc un tube de verre de 3 pieds 1/2 de longueur et de plus d'un pouce de diamètre, fermé à ses deux bouts par des bouchons de liége, frotta ce tube de la manière ordinaire et l'approcha de corps légers (2).

Il vit un duvet de plume courir au bouchon de liége, en être attiré puis repoussé, aussi bien que par le tube même, et il en conclut que le tube électrisé avait communiqué une vertu attractive au bouchon de liége. Il planta alors dans le bouchon une tige de sapin d'environ 4 pouces de longueur, terminée par une boule d'ivoire, et, répétant l'expérience, il vit que la boule attirait et repoussait la plume, même avec plus de force que n'avait fait le bouchon. Il fixa ensuite la boule d'ivoire à des tiges de bois ou de métal de plus en plus longues et constata que la boule exerçait toujours une attraction, plus forte même que tout autre point de la tige. Voulant pousser l'expérience plus loin, il suspendit la boule au tube par des cannes de roseaux ou par une ficelle, puis par une corde de 26 pieds qu'il laissait pendre en dehors d'un balcon, et la boule attirait toujours les corps légers qu'on lui présentait. Pour aller à de plus grandes distances encore, il essaya de communiquer la vertu électrique à une corde tendue horizontalement et attachée à un mur, mais sans réussir d'abord.

Wheeler, à qui Gray communiqua ces résultats, lui proposa de suspendre la corde par un cordon de soie qui, à cause de sa petitesse, laisserait sans doute échapper une quantité moindre

(1) *Philosophical transactions abridged*, vol. VI, p. 493 (1720).
(2) *Ibid.*, vol. VII, p. 449 (1727).

de la vertu électrique. L'expérience fut ainsi faite le 2 juillet 1729. Une corde de 80 pieds de longueur fut fixée par l'une de ses extrémités au tube de verre, l'autre bout de la corde s'appuyait d'abord sur un cordon de soie, et, tombant ensuite verticalement, portait une boule d'ivoire à sa partie inférieure.

Le tube étant frotté, la boule d'ivoire attira aussitôt de petits fragments de cuivre qui y restèrent suspendus quelque temps. L'expérience réussit également avec une corde de 124 pieds, repliée sur elle-même ou tendue en ligne droite. Le lendemain, comme ils voulaient allonger encore la corde, la soie cassa, et ils essayèrent de la remplacer par un fil de métal; mais ils n'obtinrent plus aucun phénomène d'attraction et en conclurent que la soie avait réellement une propriété particulière de ne pas livrer passage à la vertu électrique. Adoptant alors pour règle de n'employer que des cordons de soie comme moyens de suspension, ils conduisirent la vertu électrique jusqu'à 765 pieds, sans que les effets fussent sensiblement affaiblis; ils reconnurent qu'on peut conduire l'électricité dans toutes les directions à travers des corps de formes quelconques et de natures très-variées : les métaux, les pierres, les animaux vivants ou morts et le corps humain.

En effet, Gray toucha avec son tube électrisé un enfant suspendu par des cordes de crin ou posé sur un gâteau de résine, et vit que cet enfant attirait par ses doigts et toutes les parties de ses vêtements les corps légers qu'on lui présentait (1).

Il résulte de cette dernière observation une conséquence importante : c'est que tous les corps reconnus électriques, c'est-à-dire pouvant s'électriser par frottement, quand on les tient à la main, ne sont pas conducteurs de l'électricité, sans quoi la vertu électrique se communiquerait par la main au corps de l'observateur et de là dans le sol.

Ajoutons encore que Gray découvrit aussi l'électrisation par influence, mais sans comprendre plus que ses prédécesseurs l'importance de cette observation. Il remarqua, en effet, qu'une corde isolée acquiert des propriétés électriques quand on en approche un tube électrisé, sans que le contact soit nécessaire, et

(1) *Phil. trans. abridged.*, vol. VII, p. 567 (1731).

que ces propriétés se manifestent surtout aux points de la corde les plus éloignés du tube de verre.

On peut donc, dès à présent, distinguer deux classes de corps : les corps *conducteurs* et les corps *non-conducteurs*, bien que cette dénomination n'ait été employée que plus tard. En réalité, cette distinction, comme on le verra, ne peut être établie d'une manière absolue : tous les corps conduisent l'électricité plus ou moins, et il n'y a de différence réelle que dans le degré suivant lequel cette propriété se manifeste. Il serait donc plus exact de former une seule liste de tous les corps en commençant par ceux qui conduisent le mieux comme les métaux, et terminant par ceux qui conduisent le moins comme la soie. Les derniers s'appellent souvent corps *isolants* parce qu'ils servent à soutenir les corps conducteurs électrisés et à les isoler du sol.

6. Nous citerons, à titre de renseignement, la liste suivante [1], dans laquelle les corps ont été partagés et classés en trois groupes : les conducteurs, les demi-conducteurs et les isolants, en rappelant que cette classification ne peut avoir rien d'absolu.

CONDUCTEURS.

Métaux usuels.	Eau de pluie.
Charbon calciné.	Neige.
Graphite.	Végétaux vivants.
Acides concentrés.	Organes des animaux.
Acides étendus.	Sels solubles.
Dissolutions salines.	Toile.
Eau de mer.	Coton.
Eaux de sources.	

DEMI-CONDUCTEURS.

Alcool et éther.	Marbre.
Verre pulvérisé.	Papier.
Fleur de soufre,	Paille.
Bois sec.	Glace à 0°.

ISOLANTS.

Oxydes métalliques secs.	Glace à — 20°.
Huiles grasses.	Phosphore.
Cendres végétales et animales.	Chaux.

(1) *Encyclopedia metropolitana*. London (1830). — *Electricity*. 72.

Craie.	Laine.
Poudre de lycopode.	Soie teinte ou écrue.
Caoutchouc.	Pierres précieuses.
Camphre.	Mica.
Essences.	Verre.
Porcelaine.	Agate.
Végétaux desséchés.	Cire.
Cuir.	Soufre.
Parchemin.	Résines.
Papier sec.	Ambre.
Plumes.	Gomme laque.
Poils.	Air et gaz secs.

La conductibilité d'un corps pour l'électricité peut d'ailleurs être modifiée par diverses circonstances. Ainsi, une élévation de température a généralement pour effet d'augmenter la conductibilité. Le spath d'Islande, chauffé à une température un peu plus élevée que celle de la main, ne peut plus être électrisé par le frottement, parce qu'il est devenu conducteur, et il reprend de nouveau ses propriétés isolantes quand on le laisse refroidir (1).

Canton observa qu'un échauffement modéré permet à l'électricité de traverser de minces épaisseurs de verre comme les parois d'une bouteille, et Cavendish montra qu'une température de 400° Farenheit peut donner au verre une conductibilité analogue à celle des métaux, même sous de grandes épaisseurs.

Il en est de même pour les gaz et les vapeurs. Il suffit de placer auprès d'un corps électrisé la flamme d'une lampe conductrice communiquant avec le sol pour voir disparaître toute trace d'électricité. Il suffit même de placer un fer rouge au dessous d'un corps électrisé, pour le ramener rapidement à l'état neutre, et il est facile de montrer que la communication entre les deux corps s'établit par le courant d'air chaud qui s'élève au dessus du fer rouge.

L'humidité exerce aussi une influence considérable sur la conductibilité d'un corps. Ainsi les végétaux vivants sont de bons conducteurs, le bois sec conduit beaucoup moins, et le bois desséché au four est presque aussi isolant que le verre. D'ailleurs la plupart des corps solides sont hygrométriques, au moins par leur surface, et, se couvrant d'une légère couche d'humidité, ils

(1) Voir Priestley, *Histoire de l'Électricité*, passim.

acquièrent une conductibilité superficielle très-sensible ; c'est là une circonstance à laquelle il faut faire une grande attention, comme nous le verrons à propos de la déperdition de l'électricité.

7. Enfin, les recherches de Gray et de la plupart des physiciens du siècle dernier ne purent pas mettre en évidence le temps nécessaire pour que l'électricité se propage dans toute l'étendue d'un conducteur, quelles que soient ses dimensions. La communication des propriétés électriques parut toujours instantanée à toute distance, soit à travers des fils métalliques de plusieurs milles de longueur, soit par le corps humain, par l'eau des rivières ou par la terre elle-même. Toutefois, le P. Beccaria (1) crut constater qu'en électrisant l'une des extrémités d'un fil mince de fer de 500 pieds de long, l'attraction des corps légers par l'autre extrémité ne se manifestait qu'au bout d'une demi-seconde ; et en répétant la même expérience avec une corde de chanvre, il s'écoula plus de trois secondes avant que l'autre extrémité fût assez électrisée pour attirer les corps légers ; mais quand il eut humecté la corde, la propagation fut deux ou trois fois plus rapide. Cette expérience démontre que la durée de la propagation de l'électricité n'est pas inappréciable, au moins quand elle a lieu par les corps médiocrement conducteurs.

On appelle souvent la Terre le *réservoir commun* de l'électricité, pour exprimer par un mot ce phénomène de la disparition totale des propriétés électriques d'un corps conducteur, au moment où il est relié avec le sol par un intermédiaire conducteur. On conçoit en effet que les propriétés électriques d'un corps, une fois communiquées à une masse énorme, comme celle de la Terre, ne puissent plus produire en un point d'effets appréciables ; nous verrons plus tard une manière plus précise de concevoir le rôle de la Terre dans ce cas.

Tous les corps reconnus électriques sont nécessairement mauvais conducteurs ou isolants, comme nous l'avons vu ; inversement, un corps conducteur ne peut être électrique dans le sens habituel du mot, parce que, s'il s'électrisait quand on le frotte en le tenant à la main, la vertu électrique se transmettrait au corps

(1) *Elettricismo artificiale e naturale*, p. 51. — Priestley, t. I, p. 387.

de l'opérateur, et de là dans le sol. Nous pouvons même affirmer les réciproques de ces deux propositions, c'est-à-dire qu'un corps isolant est électrique et qu'un corps non électrique est conducteur, parce que nous verrons bientôt qu'un corps quelconque, isolé si cela est nécessaire, peut être électrisé par frottement.

Au siècle dernier, on appelait corps *idioélectriques*, ceux que l'on peut électriser par frottement quand on les tient à la main, et corps *anélectriques*, ceux qui ne peuvent s'électriser dans ces conditions. Si tout corps peut être électrisé, il n'y a pas lieu de conserver ces dénominations, puisqu'elles ne désignent en réalité que les corps *isolants* et les *conducteurs*.

Vers l'époque des expériences de Gray sur la conductibilité, Du Fay, membre de l'Académie des sciences (1), s'étant suspendu à des cordons de soie et s'étant fait électriser, remarqua que, si une autre personne approchait la main à petite distance de son visage, il éprouvait une petite douleur semblable à une piqûre d'épingle, et que la personne qui avait approché la main recevait la même impression; qu'il se produisait en même temps un petit craquement et une lueur dans l'obscurité. C'est la première étincelle électrique qui fut tirée du corps humain. Gray, reprenant ses expériences, reconnut que l'on tire les mêmes étincelles des corps isolés que l'on a électrisés par un tube de verre, et que ces corps laissent souvent échapper, surtout quand ils sont terminés en pointe, un cône lumineux ou aigrette accompagné d'un petit sifflement, et il ajoute :

« Quoique ces effets jusqu'à présent n'aient été produits que très en petit, il est probable qu'on pourra avec le temps trouver une façon de rassembler une plus grande quantité de feu électrique, et, par conséquent, d'augmenter la force de cette puissance qui, par plusieurs de ces expériences (s'il est permis de comparer les petites choses aux grandes), semble être de la même nature que celle du tonnerre et de l'éclair (2). »

8. **Distinction des deux électricités.** — Du Fay (3) fit alors une découverte importante : c'est la distinction des deux espèces d'é-

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences* (1733), p. 250.
(2) *Phil trans. abridged*, vol. VIII, p. 5 (1735).
(3) *Mémoires de l'Académie des sciences* (1733), p. 457.

lectricité. Il précisa d'abord les conditions dans lesquelles se produit la répulsion électrique observée par Otto de Guericke, et reconnut qu'un corps électrisé attire tous ceux qui ne le sont pas et les repousse aussitôt qu'ils sont devenus eux-mêmes électrisés par contact, d'après les observations de Gray. Les corps ainsi repoussés ne cessent de l'être qu'après qu'ils ont perdu la vertu électrique par leur contact avec un corps étranger. Ils peuvent être alors attirés de nouveau, puis repoussés, et les mêmes alternatives se reproduisent tant que le corps primitivement électrisé conserve ses propriétés. Ayant frotté en même temps un tube de verre et un morceau de gomme copale, Du Fay remarqua par hasard qu'un fil de soie attiré, puis électrisé et repoussé par le verre, était ensuite attiré par la gomme, et qu'inversement tout corps repoussé par la gomme était attiré par le verre. La même expérience ayant réussi avec la résine et le verre, et s'étant confirmée par un grand nombre d'épreuves différentes, Du Fay distingua deux espèces d'électricité : l'une *vitrée*, qui se développe sur le verre, le cristal de roche, les pierres précieuses, le poil des animaux, la laine, etc.; l'autre *résineuse*, que l'on obtient en frottant la résine, la gomme copale, la gomme laque, la soie, le papier, etc. « Il résulte donc de ce Mémoire, dit Du Fay, deux vérités nouvelles sur cette matière, et deux principes dont on n'avait pas eu jusqu'à présent le moindre soupçon : le premier, que les corps électriques commencent par attirer tous les corps, et qu'ils ne les repoussent que lorsqu'ils les ont rendus électriques par la communication d'une partie de leur tourbillon; et le second, qu'il y a deux électricités réellement distinctes et très-différentes l'une de l'autre [1]. »

Comme cette expérience de Du Fay est capitale, il importe de lui donner une forme tout à fait démonstrative. Pour cela, on se sert d'un pendule électrique isolé, c'est-à-dire d'un corps léger, une balle de moelle de sureau (fig. 1) suspendue par un fil de soie, et on en approche un tube de verre électrisé par frottement; la balle est attirée d'abord (fig. 2), puis repoussée après avoir touché le verre (fig. 3); elle est alors électrisée comme le verre. On en approche ensuite un bâton de résine

[1] *Loc. cit.*, p. 475.

également électrisé, et l'on constate qu'il y a tout d'abord une attraction. Toutefois, l'expérience, sous cette forme, n'est pas encore absolument concluante, car il se peut que l'attraction que l'on observe dans le dernier cas provienne de ce que l'un des deux corps seulement, la balle de sureau ou le bâton de résine, soit électrisé. Il faut donc, après avoir constaté cette attraction,

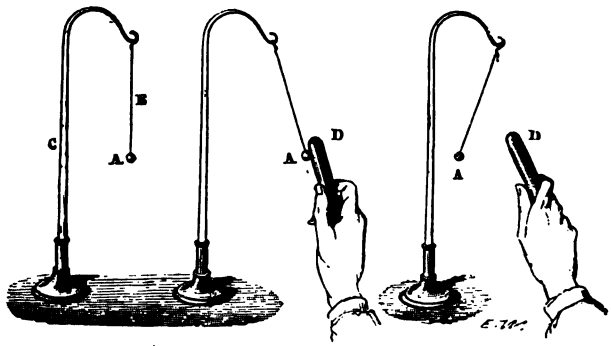


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

ne pas laisser établir le contact et vérifier ensuite que la balle est attirée par un corps à l'état naturel, et que le bâton de résine attire des corps légers.

L'expérience est plus complète si l'on emploie en même temps deux pendules électriques que nous désignerons par *a* et *b*. On frotte avec la main ou avec un morceau de drap un bâton de verre A et un bâton de résine B ; on approche séparément le verre A du pendule *a* et la résine B du pendule *b*, et l'on observe que chacun des pendules est attiré par le corps électrisé, le touche et est ensuite repoussé. On croise alors les expériences en approchant du pendule *a* le bâton de résine B et le bâton de verre A du pendule *b* ; il se manifeste une attraction de part et d'autre et on ne laisse pas les pendules aller jusqu'au contact des bâtons. Pour démontrer que dans cette seconde expérience les quatre corps sont électrisés, il suffit de recommencer la première, en approchant A de *a* et B de *b*; les deux pendules sont encore repoussés. On peut donc affirmer que le pendule *a* électrisé par le verre est repoussé par le verre électrisé et attiré par la résine électrisée ; l'inverse a lieu pour le pendule *b*. Ainsi *deux corps qui possèdent la même élec-*

tricité, vitrée ou résineuse, se repoussent; deux corps électrisés de manières différentes s'attirent.

On peut encore faire à ce sujet plusieurs observations. On a constaté qu'il y a deux manières d'électriser les corps, mais rien ne prouve qu'il n'y en existe pas d'autres encore capables de donner lieu à des phénomènes différents de ceux qui précèdent. Pour montrer qu'il n'en est rien, il suffit de prendre deux pendules électriques isolés, dont l'un a été électrisé par le verre et l'autre par la résine, et d'approcher alternativement de ces deux pendules un corps quelconque électrisé de telle manière qu'on voudra. On verra toujours que le corps électrisé attire l'un des pendules et repousse l'autre; jamais, autant du moins que la distance n'est pas trop petite, il ne les attire tous deux ni ne les repousse tous deux; il manifeste donc complétement les propriétés de l'électricité vitrée ou de la résineuse.

La répulsion n'a jamais lieu qu'entre deux corps électrisés de la même manière, mais il semble qu'il y ait deux espèces d'attractions: l'une entre des corps chargés d'électricités différentes, l'autre entre un corps électrisé et un corps naturel. Cette contradiction n'est qu'apparente, car nous verrons par les phénomènes d'influence que toute attraction entre un corps électrisé et un corps naturel est accompagnée d'une production sur ce dernier d'électricité différente de celle du corps électrique.

9. Du Fay ne vit pas que les dénominations de *vitrée* et de *résineuse* données aux deux espèces d'électricité sont défectueuses, parce que la nature de l'électricité qui se produit sur un corps frotté dépend du corps frottant. Cette observation paraît avoir été faite pour la première fois par Canton en 1753. Canton montra d'abord que l'on peut mettre sur un bâton de cire à cacheter l'une ou l'autre des deux électricités, et même les deux ensemble. Ayant frotté un bâton de cire qui se trouva ainsi chargé d'électricité résineuse, il le toucha sur une partie de sa surface par du verre électrisé, et reconnut que les deux régions de la cire avaient, la première de l'électricité résineuse, la seconde de l'électricité vitrée. Il reconnut aussi qu'un bâton de verre dépoli à l'émeri prenait l'électricité résineuse quand on le frottait avec de la flanelle, et de l'électricité vitrée quand on le frottait avec une étoffe de soie huilée et sèche, surtout après y avoir passé

un peu de craie ou de blanc d'Espagne. Les mêmes phénomènes se reproduisent avec d'autres substances, et il suffit d'altérer les surfaces ou de modifier les frottoirs pour changer la nature de l'électricité produite.

Pour éviter cette contradiction dans les termes, on appelle habituellement électricité *positive* l'électricité vitrée, c'est-à-dire celle qui se produit sur le verre poli frotté avec du drap, et électricité *négative* celle de la résine frottée aussi avec du drap. Ces deux mots *positif* et *négatif* proviennent d'une hypothèse de Franklin sur la nature des phénomènes électriques, mais on peut les accepter comme de simples dénominations, sans attacher d'importance à leur signification littérale.

10. **Production simultanée des deux électricités.** — Lorsque l'on frotte deux corps l'un par l'autre, rien ne distingue le corps frotté du corps frottant, et si l'un des deux s'électrise, il est naturel que l'autre jouisse des mêmes propriétés. Vers l'époque des expériences de Canton, on reconnut en effet que les corps frottés s'électrisent tous deux s'ils ne sont pas bons conducteurs, et l'on démontra, par un grand nombre d'expériences curieuses, que les moindres modifications dans les propriétés physiques des corps en contact, telles que la couleur, l'état plus ou moins rugueux de la surface, les différences de température, etc., suffisent pour changer le sens de l'électrisation. Mais il se passa encore plusieurs années avant que l'on découvrît que tous les corps susceptibles d'être frottés le sont en même temps de contracter la vertu électrique, et que les corps conducteurs, les métaux, par exemple, ne paraissent dénués de la propriété de s'électriser par frottement que parce que l'électricité produite disparaît dans le sol.

Wilson (1), qui paraît avoir fait cette observation pour la première fois, frotta une lame de verre avec un morceau d'argent porté par une tige de bois séché au four, et trouva que l'argent était chargé d'électricité négative et la lame de verre d'électricité positive. L'expérience réussit avec tous les métaux, pourvu qu'on ait soin de les isoler; il suffit de tenir une tige ou une boule de métal (fig. 4) par un manche de verre et de le frotter

(1) *Phil. trans. abridged*, vol. XI, p. 504 (1760).

avec de la soie ou mieux de le frapper avec une peau de chat pour constater que le métal est électrisé négativement et qu'on peut en tirer à la main des étincelles de plusieurs centimètres. Le phénomène est d'ailleurs général : deux corps frottés ensemble prennent toujours des électricités de natures différentes.

Fig. 4.

11. Il restait encore à montrer que les propriétés électriques acquises par les deux corps frottés, quoique d'espèces différentes, produisent des effets égaux, et que, d'une manière plus générale encore, toutes les fois qu'il se produit une certaine quantité d'électricité positive sur un corps, il se produit en même temps sur un ou plusieurs autres une quantité équivalente d'électricité négative.

Une des premières expériences dans laquelle on ait constaté ce fait, est due à Œpinus [1].

On prend deux disques de même diamètre, l'un en verre poli C (fig. 5), l'autre B en bois recouvert de drap. Ces disques étant portés par des manches de verre, on les frotte l'un contre l'autre, puis on les approche séparément de deux pendules électriques isolés; on reconnaît, en opérant comme il a été dit plus haut, que les disques sont électrisés en sens différents, que le verre est positif et le bois négatif.

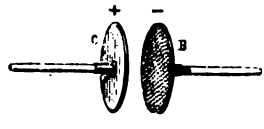


Fig. 5.

Pour démontrer que les quantités d'électricité développées de part et d'autre sont équivalentes, on recommence l'expérience, et, laissant les deux disques en contact après les avoir frottés, on les approche simultanément d'un pendule à l'état naturel, soutenu par un fil de lin conducteur ; il ne se manifeste aucun effet. Séparant alors les deux disques sans les frotter de nouveau, on constate que chacun d'eux isolément attire le pendule, et qu'ils possèdent des électricités différentes. Cette expérience réussit avec deux disques de nature quelconque, même quand ils sont formés de substances identiques, comme l'a constaté Œpinus. Il existe toujours soit dans l'état physique des deux disques, soit dans la manière dont on les frotte, une différence quelconque

[1] *Œpini tentamen theoriæ electricitatis et magnetismi*, p. 63 (1759).

qui suffit pour provoquer une différence dans l'état électrique.

Il peut paraître singulier que deux corps électrisés, capables l'un et l'autre d'attirer un même pendule à l'état naturel n'aient plus aucun effet quand ils agissent simultanément, comme si deux forces parallèles et de même sens pouvaient avoir une résultante nulle. Pour comprendre cette expérience, il faut savoir, comme nous l'avons déjà dit et comme il sera démontré à propos des phénomènes d'influence, que, lorsqu'un corps électrisé en attire un autre primitivement à l'état naturel, ce dernier se trouve alors électrisé d'une manière différente. Le pendule soumis en même temps à l'action du disque de verre positif et du disque de bois négatif tend à prendre de l'électricité négative sous l'influence du premier, de l'électricité positive sous l'influence du second, et il reste à l'état naturel parce que ces deux actions sont égales. On peut donc dire que les quantités d'électricité de sens différents développés par le frottement sont équivalentes, puisqu'à la même distance elles produisent des effets égaux et opposés.

On pourrait rendre l'expérience plus simple au point de vue théorique en frottant l'un sur l'autre deux disques de substances isolantes et les faisant agir séparément sur deux boules de moelle de sureau fixées aux deux extrémités d'une aiguille de verre pouvant tourner en son milieu sur un pivot; il se produirait alors deux attractions égales et l'aiguille serait en équilibre quand les boules seraient à des distances égales des plateaux correspondants. Sous cette forme, cependant, l'expérience n'est pas réalisable, parce que l'aiguille serait dans un état d'équilibre instable. Il suffirait de toucher chacune des boules par le disque correspondant pour obtenir des répulsions : l'équilibre serait alors stable et aurait lieu pour la même position de l'aiguille ; mais ici encore il faudrait, pour réussir l'expérience, que les propriétés des disques fussent identiques au point de vue de la conductibilité, afin que chacune des boules prît une même fraction de l'électricité totale du disque qu'elle aurait touché, ce qui serait difficile à réaliser. La seule vérification expérimentale possible est donc de faire agir les deux corps frottés en les laissant en contact.

On peut réaliser encore cette expérience d'une manière plus

simple, comme l'a indiqué Faraday. On frotte un bâton de cire d'Espagne (fig. 6) avec un bonnet de soie qui porte un cordon de soie. Laissant ensuite le bâton de cire coiffé de son bonnet, on l'approche d'un pendule ou d'un corps léger quelconque et on n'observe aucun effet. Il suffit alors d'enlever le bonnet par son cordon, pour constater que le bâton est électrisé, le bonnet aussi, et que les deux électricités sont d'espèces différentes.

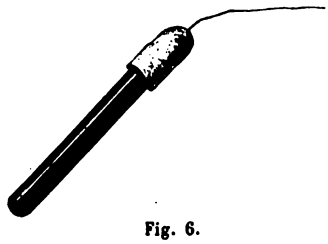


Fig. 6.

Œpinus a reconnu aussi, par une autre expérience où le frottement ne paraît pas intervenir, cette production simultanée des deux électricités (1). En versant du soufre fondu dans une coupe de métal portée par un support isolant, il observa que, quand le soufre fut refroidi, la coupe et le soufre ensemble ne donnèrent aucun signe d'électricité. Si on enlève le soufre par une tige que l'on y a plantée avant la solidification, on constate que le soufre est électrisé positivement et la coupe négativement ; si l'on remet alors le soufre en place, toute électricité disparaît, pour reparaître de nouveau quand on le sépare de la coupe.

12. Ainsi les deux électricités s'accompagnent constamment dans le frottement et il n'y a pas de substance qui ne puisse être électrisée de cette manière. Aux expériences déjà citées, on pourrait en ajouter beaucoup d'autres, comme, par exemple, l'électrisation du corps humain. Une personne étant suspendue par des cordons de soie, comme on le faisait au siècle dernier, ou placée sur un *tabouret isolant* formé d'une tablette à pieds de verre, on la frappe avec une peau de chat. Cette personne devient alors électrique, attire les corps légers et provoque des étincelles en approchant la main d'un objet en communication avec le sol. Si la personne qui frappe est elle-même isolée, elle s'électrise aussi, mais positivement, l'autre ayant de l'électricité négative ; et si toutes deux se touchent par les mains, il se produit une étincelle plus forte. Cette étincelle est accompagnée d'une douleur analogue à une piqûre d'épingle et d'une secousse dans les bras.

(1) *Loc. cit.*, p. 66.

La quantité d'électricité est tellement grande dans ce cas que les cheveux et la barbe se hérissent par l'effet de leur répulsion réciproque et produisent sur la peau l'impression de frôlement d'une toile d'araignée; dans l'obscurité, les extrémités des cheveux paraissent lumineuses.

Le frottement des liquides contre les corps solides donne les mêmes résultats que le frottement des solides entre eux.

Hauksbée avait déjà constaté que le frottement du mercure contre le verre dans le vide donne des lueurs, comme on les observe souvent en faisant toucher par le mercure le haut du tube d'un baromètre.

Canton (1) remarqua qu'un tube de verre sec plongé dans un bain de mercure s'électrise positivement; que l'ambre, la cire à cacheter, le spath d'Islande font de même, le mercure étant dans tous les cas négatif. Si, faisant cette expérience, on laisse le bâton de verre immergé dans une éprouvette en verre renfermant du mercure, on n'observe aucune trace d'électricité tant que le verre est immergé, tandis que l'électrisation du mercure et celle du verre deviennent de plus en plus manifestes à mesure qu'on retire le bâton.

Le phénomène est encore plus remarquable dans l'expérience dite de la *pluie de mercure*. Un tube de verre monté sur la machine pneumatique est terminé, à la partie supérieure, par un godet à bords métalliques dont le fond est formé par une plaque de buis perpendiculaire à la direction des fibres. Ce godet renfermant du mercure, on raréfie l'air en faisant fonctionner la pompe. Le mercure passe par les canaux du bois et tombe sous forme de pluie : un petit tube de verre en siphon, mastiqué à la partie inférieure, empêche ce mercure tombé de pénétrer dans les conduits de la machine pneumatique. Si l'expérience est faite dans l'obscurité, le tube de verre est illuminé dans toute son étendue. Ce tube et surtout la garniture supérieure sont fortement électrisés, et approchant le doigt de la garniture supérieure, on obtient des étincelles de plusieurs centimètres de longueur.

Enfin, il en est de même pour les gaz. Wilson projeta avec un

(1) *Phil. trans. abridged*, vol. XI, p. 611 (1762).

[illegible] une tourmaline, sur une lame de [illegible] et reconnut que ces différents [illegible] de l'électricité positive. La produc- [illegible] actuel est due au frottement de l'air, [illegible] du soufflet, soit contre le corps [illegible] soit aux deux causes à la fois.

[illegible] corps au point de vue électrique. — On [illegible] s'il y a une règle qui préside au [illegible] le frottement de deux corps. Comme [illegible] produit sur un corps ne dépend pas [illegible] corps, on conçoit que, dans le frot- [illegible] chaque substance à prendre l'une des [illegible] exemple, ne soit pas la même, et que le [illegible] du degré auquel cette tendance [illegible] frottés. On a remarqué, en effet, [illegible] quand on le frotte avec un corps A, [illegible] corps B (le drap, par exemple, avec le [illegible] des deux corps A et B développe [illegible] l'électricité positive sur A, et négative [illegible] il y a une échelle des corps au point [illegible] il existe une échelle des températures, [illegible] différentes substances suivant une liste [illegible] frottée avec l'une de celles qui la [illegible] mais positive avec l'une quelconque de [illegible]

[illegible] listes ainsi dressées est la suivante, don-

Cire blanche.
Verre dépoli.
Plomb.
Soufre.
Métaux.

[illegible] positive du plomb par le soufre, indiquée par [illegible] une observation inexacte.

[illegible] *inauguralis de electricitatibus contrariis*, p. 54, Rostock.

On remarquera que dans cette liste tous les métaux sont sur la même ligne ; leur rôle électrique est cependant très-différent, mais il est difficile à déterminer par des expériences directes, parce que, dans le frottement réciproque de deux métaux, l'électricité produite sur l'un d'eux se communique aussitôt à l'autre par le fait de la conductibilité.

Pour constituer une liste qui comprenne les métaux, il suffit de posséder une série de corps isolants qui viennent se placer comme autant d'échelons intermédiaires entre les métaux qu'il s'agit de classer. M. Gaugain [1] est parvenu par une suite de tâtonnements à se procurer la plus grande partie de ces échelons. Comme les métaux sont presque tous négatifs avec le soufre et positifs avec la gutta-percha, l'on peut, en mélangeant convenablement ces deux substances, obtenir une partie des termes de comparaison dont on a besoin. Voici la liste ainsi établie par M. Gaugain, et qui peut être considérée comme la continuation de celle de Wilke : les métaux situés sur la même ligne n'ont pas été distingués au point de vue électrique; nous reviendrons plus tard sur le procédé d'expérience et sur la méthode employée pour reconnaître le signe de l'électricité.

Aluminium.	Antimoine.
Plomb, Carmium, Zinc.	Argent.
Fer, Étain.	Platine.
Cuivre, Bismuth.	Mercure, Or, Palladium.

14. Toutefois il ne faut pas attribuer à ce genre de classification une valeur absolue. Les moindres changements dans l'état physique d'un corps, comme on l'a vu pour le verre poli ou dépoli, les traces de substances étrangères, comme les matières colorantes, de faibles variations de température et d'autres circonstances en apparence insignifiantes, suffisent pour intervertir certains rôles électriques et bouleverser la liste.

Symmer [2], par exemple, avait remarqué qu'en ôtant ses bas de soie, ils pétillaient et laissaient échapper dans l'obscurité des étincelles lumineuses. Ces phénomènes n'étaient jamais aussi intenses que lorsqu'il portait un bas de soie blanc et un noir sur

[1] *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. VI, p. 26.
[2] *Phil. trans. abridg.*, vol. XI, p. 404 (1759).

la même jambe. Les bas ne donnaient pourtant que peu de signes d'électricité, tant qu'ils étaient sur la jambe ou réunis ensemble, mais au moment où ils furent séparés, on les trouva fortement électrisés, le blanc positivement, le noir négativement. Quand on les tint séparés l'un de l'autre à une certaine distance, ils parurent gonflés, à tel point qu'ils montraient la forme entière de la jambe. En les présentant les uns aux autres, on vit que deux bas de même couleur se repoussaient jusqu'à faire un angle de 30 ou 35 degrés, et deux bas de couleurs différentes s'attiraient violemment. De même si l'on frotte un ruban de soie sur un autre, placé en croix, celui des deux qui est frotté parallèlement à sa longueur est électrisé positivement, et l'autre négativement. Quand deux corps de même nature, à des températures différentes, sont frottés ensemble, le plus chaud est en général négatif, etc.

Il y a même parfois des irrégularités singulières dont il est difficile de se rendre compte par un changement d'état des surfaces. Ainsi on croit généralement que la peau de chat est positive avec tous les corps, et en particulier avec le verre poli; M. Hagenbach (1) a constaté que cette règle est loin d'être absolue. Ainsi :

1° Si l'on frotte le verre dans un sens déterminé, et qu'on se serve de la peau du cou ou des pattes, le verre est négatif; il est positif, au contraire, si l'on emploie la peau du dos;

2° Si, avec la peau du cou ou des pattes de derrière, on frotte le verre dans un sens déterminé, il est négatif; il est positif, au contraire, si l'on frotte alternativement dans un sens et dans l'autre;

3° Avec la peau des pattes de derrière, une friction, accompagnée d'une légère pression, rend le verre négatif; il devient, au contraire, positif si la pression est considérable;

4° Un bâton de verre, frotté alternativement dans les deux sens sur la peau des pattes de devant, devient positif; il est, au contraire, négatif, si on le transporte successivement sur toutes les parties de la peau.

Ces phénomènes paraissent tellement bizarres, qu'on hésite à

(1) [illegible], t. VIII, p. 65, 1873. — *Journal de Physique*, t. II.

y ajouter foi, tant qu'on ne les a vérifiés soi-même ; les irrégularités signalées par M. Hagenbach sont cependant réelles, mais il est difficile de les vérifier dans tous leurs détails, parce que les signes d'électricité dépendent aussi de la nature du verre et des corps avec lesquels on a mis la surface en contact. On doit retenir de là cette conclusion que, pour obtenir, dans une circonstance donnée, de l'électricité positive, il faut se garder d'avoir recours à un bâton de verre frotté avec une peau de chat.

M. Hagenbach indique aussi beaucoup d'expériences curieuses, relatives au signe de l'électricité produite par le frottement de la porcelaine, du papier, de la soie, des métaux, etc. Le coton-poudre a paru négatif avec tous les corps et même les métaux, à l'exception seulement du sulfure de cuivre qui est encore plus négatif.

15. **Hypothèses relatives à la nature de l'électricité.** — Les physiciens n'ont pas tardé à vouloir expliquer par une théorie les phénomènes curieux de l'électricité. Boyle énonce déjà (1) trois hypothèses qui, au fond, ne diffèrent pas beaucoup l'une de l'autre. Il considère d'abord les attractions électriques comme l'effet d'une effluve matérielle qui émane des corps électrisés et y retourne ensuite, aidée en partie dans cette opération par la réaction de l'air extérieur. Une autre hypothèse consisterait à admettre que les vapeurs émises par les corps électrisés s'écartent à une petite distance, puis sont ramenés à leur point de départ comme un petit tourbillon par suite de la résistance de l'air. Enfin Boyle attribue à Gilbert la première conception d'une autre idée théorique d'après laquelle les corps électrisés, échauffés par le frottement, émettraient des rayons ou filaments d'une matière onctueuse, capables de s'agglutiner en se refroidissant au contact le l'air, et, perdant ainsi une partie de leur force expansive, de retourner au point de départ, entraînant avec eux les corps légers voisins auxquels ils adhèrent.

Hauksbée (2) admet qu'une boule électrisée émet des *effluves* qui sortent en lignes physiques du centre vers la circonférence, et raréfient le milieu contigu suivant les mêmes directions ; le cours de l'air éloigné qui est plus dense doit être en lignes con-

(1) *Boyle's works*, t. IV, p. 345.
(2) *Expériences physico-mécaniques*, traduct. franç., p. 394.

vergentes de la circonférence au centre, et par conséquent son action ramène les corps voisins dans une direction régulière vers le centre.

L'abbé Nollet ne considère pas que le courant d'air opposé aux effluves puisse suffire à expliquer le mouvement des corps, et il imagine un deuxième flux de sens opposé. « Un corps, dit-il (1), est naturellement électrique quand il en sort des émanations que j'ai nommées *matière effluente*, et que ces émanations sont continuellement remplacées par un autre courant de matière, que j'ai appelée *affluente*. »

Dans ces premières tentatives de théorie assez grossières, on n'avait en vue que le phénomène de l'attraction électrique. Franklin émit, dès le début de ses expériences sur l'électricité, une conception plus précise. Bien que cette théorie ait été imaginée pour expliquer d'autres phénomènes encore que ceux que nous avons énumérés jusqu'à présent, il est nécessaire de l'énoncer actuellement pour servir de guide dans la suite de cette étude. Pour Franklin (2), « la matière électrique est composée de particules extrêmement subtiles, puisqu'elle peut traverser la matière commune sans que celle-ci en éprouve aucune résistance sensible. Les particules de matière électrique se repoussent l'une l'autre, mais sont fortement attirées par toute autre matière. Dans la matière commune, il y a autant de matière électrique qu'elle peut en contenir dans sa substance. Si l'on en ajoute davantage, le surplus reste sur la surface et forme ce que nous appelons une atmosphère électrique, et l'on dit alors que le corps est électrisé, etc. »

Un corps à l'état naturel a donc, d'après Franklin, une quantité d'électricité normale; si l'on augmente cette charge, le corps est électrisé en plus ou *positivement*; si on la diminue, il est électrisé *négativement*. Cette hypothèse de Franklin, en la complétant ou non par l'action réciproque des molécules matérielles qu'Œpinus (3) a cru nécessaire de faire intervenir, suffit pour rendre compte des attractions et des répulsions électri-

(1) [illegible] *l'électricité des corps*, p. 116 (1746).

(2) [illegible] *l'électricité* (Opinions et conjectures sur les propriétés et sur les effets de la matière électrique (1749).

(3) *Theoria tentamen*, p. 30.

ques. Toutefois Œpinus croyait que l'action directe des molécules matérielles devait être répulsive, mais cette hypothèse nouvelle n'est pas nécessaire.

Vers la même époque, Symmer (1) s'appuyant sur les observations de Du Fay et sur des expériences qui lui étaient propres, jugeait au contraire que les deux espèces de phénomènes électriques étaient entièrement distinctes et ne pouvaient être expliquées par une même matière, par un même fluide. Il imagina donc qu'il y avait deux espèces de fluides différents, les particules de chacun des deux fluides se repoussant mutuellement et attirant les particules de l'autre fluide, les deux fluides d'ailleurs attirant la matière ordinaire.

Ces deux théories de Franklin et de Symmer sont encore en faveur aujourd'hui, et il importe de remarquer tout d'abord qu'elles rendent également compte des principaux phénomènes. Nous verrons bientôt que la répulsion ou l'attraction de deux corps électrisés, de petites dimensions par rapport à la distance qui les sépare, est en raison inverse du carré de la distance et proportionnelle au produit des quantités d'électricité qu'ils possèdent, ou de leurs masses électriques. On peut donc étendre la même loi aux éléments des corps de dimensions quelconques.

16. **Théorie de Franklin.** — Cela étant, supposons, d'après l'hypothèse de Franklin, qu'il n'y a qu'un fluide électrique, et qu'un corps renferme une certaine masse de matière pondérable et une masse différente de matière électrique. Désignons par F l'attraction de l'unité de masse pondérable sur une masse pondérable égale située à l'unité de distance; appelons de même φ l'attraction de l'unité de masse électrique sur l'unité de masse pondérable à l'unité de distance, et f celle de l'unité de masse électrique sur une masse égale, toujours à l'unité de distance, cette dernière force étant répulsive. Supposons enfin que toutes ces actions s'exercent en raison inverse du carré de la distance.

Considérons d'abord l'action d'un élément de volume A renfermant une masse pondérable M et une masse électrique m, sur une masse électrique m' placée à la distance r. Cette action se

(1) *Phil. transabridged*, vol. XI, p. 417 (1759).

compose de deux forces, l'une attractive $\varphi\frac{Mm'}{r^2}$, l'autre répulsive $f\frac{mm'}{r^2}$; leur résultante est

$$\frac{m'}{r^2}(\varphi M - fm).$$

Cette résultante est nulle si l'on a

$$\varphi M - fm = 0, \text{ ou } \frac{m}{M} = \frac{\varphi}{f},$$

et l'élément A est dit à l'état naturel ou *neutre*; il n'exerce alors aucune action sur la matière électrique qui l'environne. Un corps est donc à l'état neutre lorsque la quantité de matière électrique qu'il renferme est dans un rapport déterminé avec la quantité de matière pondérable.

Considérons maintenant l'action mutuelle des deux éléments de volume A et B à l'état neutre; le premier renferme une masse pondérable M et une masse électrique m; le second une masse pondérable M' et une masse électrique m', et l'on a

$$\frac{m}{M} = \frac{m'}{M'} = \frac{\varphi}{f}.$$

Cette action est la résultante de quatre forces : d'abord l'action de M et celle de m sur m', actions dont la somme est nulle puisque l'élément A est à l'état neutre; puis l'action de M et celle de m sur M', ce qui donne, en tenant compte de l'équation précédente :

$$F\frac{MM'}{r^2} + \varphi\frac{mM'}{r^2} = \frac{MM'}{r^2}\left(F + \varphi\frac{m}{M}\right) = \frac{MM'}{r^2}\left(F + \frac{\varphi^2}{f}\right).$$

Cette action n'est pas nulle, elle représente l'attraction universelle ou la gravitation.

Un corps électrisé possède une masse électrique plus grande ou plus faible que la quantité normale. Cherchons l'action mutuelle de deux éléments de volume A et B renfermant, le premier une masse pondérable M et une masse électrique $m + \mu$, le second une masse pondérable M' et une masse électrique $m' + \mu'$.

Les masses m et m' étant les quantités normales d'électricité des deux corps, le premier aura un excès d'électricité μ et le second un excès μ', ces deux excès étant d'ailleurs positifs ou négatifs afin de comprendre dans une même formule les deux espèces d'électrisation. Il faut donc évaluer l'action de l'ensemble $(M+m+\mu)$ sur $(M'+m'+\mu')$.

L'action de $(M+m)$ sur M' est, comme nous venons de le voir, égale à $\frac{MM'}{r^2}\left(F+\frac{\varphi^2}{f}\right)$; les actions de $(M+m)$ sur m' et sur μ' sont nulles. D'autre part, l'action de μ sur $(M'+m'+\mu')$ se compose de l'action exercée sur $(M'+m')$ qui est nulle et de l'action sur μ' qui est répulsive et égale à $f\frac{\mu\mu'}{r^2}$.

L'action résultante de l'élément A sur l'élément B se réduit donc à

$$\frac{MM'}{r^2}\left(F+\frac{\varphi^2}{f}\right)-f\frac{\mu\mu'}{r^2};$$

elle est formée de deux termes dont le premier est la gravitation, et le second l'action électrique. On peut même remarquer que, pour arriver à ce résultat, il n'est pas nécessaire d'admettre qu'il y ait attraction directe entre deux masses de matière pondérable ; car si l'on fait $F=0$, il reste encore, pour représenter la gravitation, un terme $\frac{MM'}{r^2}\times\frac{\varphi^2}{f}$, qui provient de l'action de la matière pondérable sur la matière électrique.

Comme les actions électriques sont très-grandes par rapport à la gravitation, il faut supposer, pour rendre compte des phénomènes, ou que les masses électriques sont très-grandes par rapport aux masses pondérables, ou que la force f relative à l'action mutuelle des masses électriques est beaucoup plus grande que les forces F et φ.

17. **Théorie de Symmer.** — L'hypothèse des deux fluides conduit à peu près aux mêmes résultats. Il faut admettre ici qu'il y a deux fluides différents, que les molécules d'un même fluide se repoussent et attirent les molécules de l'autre fluide, que la matière pondérable attire également les deux fluides, et qu'enfin dans un corps à l'état naturel il y a des quantités sinon indéfi-

nies, du moins très-considérables, des deux fluides différents, qui constitue le fluide neutre. Appelons ces deux fluides, l'u positif, l'autre négatif. Un corps sera électrisé positivement ou négativement suivant que l'un ou l'autre de ces deux fluides sera en excès.

Considérons d'abord, avec les mêmes notations que plus haut, l'action de deux éléments de volume A et B à l'état neutre; le premier renferme une masse pondérable M et des masses égales $+m$ et $-m$ d'électricités contraires constituant le fluide neutre, le second renferme de même des masses M', $+m'$ et $-m'$. L'action des deux éléments comprend : l'attraction des masses pondérables $F\frac{MM'}{r^2}$, l'attraction de la masse pondérable M sur les deux masses électriques $+m'$ et $-m'$ ou $2\varphi\frac{Mm'}{r^2}$, et enfin l'attraction de $+m$ et $-m$ sur M' ou $2\varphi\frac{M'm}{r^2}$. Les actions de $+m$ et $-m$ sur $+m'$ et $-m'$ donnent une somme nulle. La résultante est donc

$$F\frac{MM'}{r^2}+2\varphi\frac{Mm'+M'm}{r^2}=\frac{MM'}{r^2}\left[F+2\varphi\left(\frac{m'}{M'}+\frac{m}{M}\right)\right].$$

Si l'on admet que le rapport de la masse électrique d'un corps à l'état naturel à la masse pondérable est constant et égal à α, on pourra écrire

$$\frac{MM'}{r^2}\left[F+2\varphi\left(\frac{m'}{M'}+\frac{m}{M}\right)\right]=\frac{MM'}{r^2}(F+4\varphi\alpha).$$

Cette expression représente l'attraction universelle.

Supposons maintenant que l'on ajoute au premier élément A un excès $+\mu$ d'électricité positive, et au second élément B un excès $+\mu'$ de même électricité. L'action de ces éléments $(M+m-m+\mu)$ et $(M'+m'-m'+\mu')$ se composera du terme que nous venons de trouver, plus de l'attraction de M sur μ' ou $\varphi\frac{M\mu'}{r^2}$, de l'attraction $\varphi\frac{M'\mu}{r^2}$ de μ sur M' et de la répulsion de μ

sur μ' ou $f\frac{\mu\mu'}{r^2}$. La résultante sera donc

$$\frac{MM'}{r^2}(F+4\varphi\alpha)+\varphi\frac{M\mu'+M'\mu}{r^2}-f\frac{\mu\mu'}{r^2},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{MM'}{r^2}(F+4\varphi\alpha)+\frac{MM'}{r^2}\varphi\left(\frac{\mu'}{M'}+\frac{\mu}{M}\right)-f\frac{\mu\mu'}{r^2}.$$

Le premier terme est la gravitation, et le dernier l'action électrique; mais il existe un terme nouveau qui n'a pas de signification simple et qu'on ne pourrait éviter d'une manière absolue qu'en faisant $\varphi=0$, c'est-à-dire en supposant que le fluide électrique n'agit pas sur la matière pondérable.

Dans ce cas, le mouvement des corps pondérables qui semblent suivre les fluides électriques devrait s'expliquer non par l'action directe des fluides, mais par les pressions que le milieu ambiant exercerait sur le fluide répandu à la surface des corps électrisés. Si, au contraire, le facteur φ conserve une valeur finie, l'action des deux corps électrisés n'est plus rigoureusement proportionnelle au produit des quantités d'électricité, et l'attraction d'un corps électrisé sur un corps à l'état neutre est différente de la gravitation; en d'autres termes, le fluide électrique ne serait pas impondérable. En réalité, l'expérience ne peut rien prouver à ce sujet, parce qu'il paraît difficile de démontrer que le poids d'un corps électrisé ne diffère pas du poids du même corps à l'état neutre. Dans tous les cas, le terme $\frac{MM'}{r^2}\varphi\left(\frac{\mu'}{M'}+\frac{\mu}{M}\right)$, dont il est ici question, peut être considéré comme insensible dans les expériences et tous les phénomènes s'expliqueront aussi bien par la théorie des deux fluides.

18. **Remarques sur l'idée de fluide.** — Bien que la notion de fluide électrique soit universellement répandue aujourd'hui et tellement entrée même dans le langage vulgaire que l'existence de cet élément mystérieux ne fasse aucun doute dans l'esprit des narrateurs de coups de foudre, cependant l'idée de fluide a perdu beaucoup de son crédit dans la science. Les conceptions actuelles sur la constitution des corps ont fait abandonner la plupart des

fluides auxquels on avait recours autrefois. On admet bien encore l'éther, milieu élastique répandu dans tous les corps pondérables et dans les espaces planétaires, et dont les vibrations servent à expliquer les phénomènes lumineux ; mais on répugne à conserver dans la science deux nouveaux fluides indépendants du premier. La corrélation des forces physiques, la transformation des phénomènes calorifiques, lumineux, électriques et magnétiques les uns dans les autres, semblent conduire à les considérer comme des manifestations d'un même agent. On admettrait donc comme plus probable, l'hypothèse d'un seul fluide qui ne serait autre chose que l'éther.

Toutefois l'expérience indique, comme nous le verrons, qu'il n'y a pas de phénomènes électriques dans le vide absolu, c'est-à-dire en l'absence de toute matière pondérable. Il semble résulter de là [1] que l'on doit appeler *fluide électrique* contenu dans un volume donné, non pas la quantité totale d'éther, mais la somme des atmosphères d'éther qui entourent les molécules pondérables, c'est-à-dire l'excès de la quantité totale d'éther que contient le volume sur la quantité qu'il contiendrait sans la présence des molécules pondérables. Pour expliquer les phénomènes électriques, il suffira d'admettre que la matière pondérable attire l'éther en raison inverse du carré de la distance, et que l'action mutuelle de deux atmosphères d'éther est proportionnelle au produit de leurs masses et aussi en raison inverse du carré des distances.

On doit remarquer, à ce propos, que la théorie des phénomènes lumineux semble exiger une loi d'action toute différente entre les molécules voisines de l'éther. L'énorme vitesse de propagation des ondes lumineuses indique d'abord que la force qui s'exerce entre deux molécules voisines est très-énergique. Les recherches théoriques de Cauchy ont montré que, dans un milieu isotrope, c'est-à-dire tel que les propriétés soient les mêmes dans toutes les directions, comme l'éther libre répandu dans le vide, peuvent se propager deux sortes de vibrations, les unes transversales, les autres longitudinales, avec des vitesses très-différentes ; l'existence des unes et des autres dépend de la loi des

[1] Briot, *Théorie mécanique de la chaleur*, p. 254.

forces moléculaires. On attribue les phénomènes lumineux aux vibrations transversales. En suivant la méthode de Cauchy, M. Briot a fait voir que, pour que les vibrations transversales puissent se propager, il est nécessaire que la force répulsive qui s'exerce entre deux molécules voisines d'éther, varie en raison inverse d'une puissance de la distance plus élevée que la quatrième. L'étude des lois de la propagation de la lumière dans les milieux biréfringents semble indiquer que cette puissance est précisément la sixième, et l'absence de dispersion dans le vide conduit à la même conclusion. Il y a contradiction apparente entre cette loi et celle des actions électriques ; mais il est probable que les phénomènes lumineux sont dus à l'action immédiate des molécules d'éther sur les molécules les plus voisines, tandis que la force électrique proviendrait de l'action de ressort ou de l'élasticité des atmosphères d'éther qui entourent les molécules pondérables.

Lamé (1) pensait que l'intervention du fluide éthéré, sagement conduite, doit trouver le secret ou la véritable cause des effets que l'on attribue au calorique, à l'électricité, au magnétisme, à l'attraction universelle, à la cohésion et aux affinités chimiques, et plusieurs savants ont cherché à préciser davantage cette idée. Nous citerons, par exemple, M. Renard (2), M. Moutier (3), M. Edlung (4), etc. Faraday concevait les phénomènes électriques d'une manière toute différente, au moins en apparence : son hypothèse consiste à admettre que les actions se communiquent d'un corps à un autre par le moyen du milieu intermédiaire, et suivant certaines directions qu'il appelait les *lignes de force ;* mais les expériences qui lui avaient paru démontrer l'existence de ces lignes de force peuvent être interprétées d'une manière complète dans la théorie des fluides.

La théorie d'un seul fluide paraît donc de beaucoup la plus probable; mais nous continuerons d'adopter, comme on le fait

(1) *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, p. 344.

(2) *Distribution de l'électricité dans les corps conducteurs en partant de l'hypothèse d'un seul fluide.* Mém. de l'Académie de Stanislas. (Nancy, 1859.)

(3) *Sur les attractions et les répulsions des corps électrisés au point de vue de la théorie mécanique de l'électricité.—Annal. de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XVI, p. 108 1869).

(4) *Théorie des phénomènes électriques.* — Mémoire présenté à l'Académie royale des sciences de Suède, le 12 nov. 1873.

généralement, l'hypothèse des deux fluides, qui est équivalente au point de vue des expériences et qui a l'avantage d'être plus commode pour le langage. Toutefois il ne faut pas croire que l'une ou l'autre des deux hypothèses dont on fait usage, surtout pour rendre les descriptions plus faciles, infirme en rien la valeur des raisonnements. « Je préviens, dit Coulomb, pour mettre la théorie qui va suivre à l'abri de toute dispute systématique, que, dans la supposition des deux fluides électriques, je n'ai d'autre intention que de présenter avec le moins d'éléments possible, les résultats du calcul et de l'expérience, et non d'indiquer les véritables causes de l'électricité (1). »

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences*, p. 675 (1788).

CHAPITRE II

LOIS DES ACTIONS ÉLECTRIQUES

19. **Tentatives antérieures à Coulomb.** — L'action mutuelle de deux corps électrisés est d'autant plus grande que leur distance est plus faible et que l'électrisation de chacun d'eux a été plus forte. On avait reconnu depuis longtemps le sens général du phénomène et prévu les lois. Œpinus [1], en particulier, était disposé à donner la préférence à la loi du carré des distances, qui a pour elle toutes les analogies naturelles. Cavendish avait presque atteint la véritable solution. « Il existe, dit-il [2], une substance que j'appelle fluide électrique, dont les particules se repoussent et attirent les molécules matérielles avec une force qui varie en raison inverse d'un peu moins du cube de la distance ; les molécules de toute autre espèce de matière se repoussent aussi mutuellement et attirent celles du fluide électrique, suivant une loi semblable. » Il paraît même [3] que, dans les manuscrits retrouvés plus tard, Cavendish rapporte avoir démontré par expérience que, si deux sphères creuses de substances conductrices sont concentriques et communiquent entre elles, la quantité d'électricité que prend la sphère intérieure est insensible et qu'elle n'atteint pas le $\frac{1}{50}$ de la charge totale. Si l'on admet que la charge de la sphère intérieure est nulle, on peut montrer, comme l'a fait Cavendish, que la répulsion mutuelle des particules du fluide est en raison inverse du carré de la distance. Toutefois,

(1) *Œpini tentamen*, p. 58.
(2) *Phil. trans. abridged*, vol. XIII, p. 224 (1771).
(3) Snow Harris, *Leçons élémentaires d'électricité*, traduct. franç. de M. Garnault, p. 25.

malgré ces tentatives qu'il est juste de rappeler, quoiqu'elles ne fussent guère que des idées spéculatives, la question était encore très-douteuse, et c'est à Coulomb que l'on doit d'avoir déterminé par expérience les lois des actions électriques.

L'une des méthodes employées par Coulomb pour l'étude des forces électriques est la balance de torsion. Un instrument fondé sur le même principe a été employé à peu près à la même époque par Mitchell, pour la recherche de l'attraction directe des corps pondérables et la détermination de la densité de la terre, et les expériences ont été faites par Cavendish (1). Mais Coulomb n'a pu avoir aucune connaissance des travaux de Mitchell au sujet de cet appareil (2) ; en tous cas, il en a fait précéder l'emploi par une étude complète des lois de la torsion des fils métalliques, et la balance à fil de torsion est devenue depuis un instrument d'une application générale dont on lui doit rapporter tout le mérite. Cet appareil est tellement important qu'il est utile d'en examiner la théorie avec soin et d'indiquer les résultats obtenus par Coulomb sur la torsion des fils de métal. — Nous commencerons par rappeler quelques théorèmes de mécanique.

20. **Formules relatives à la torsion des fils.** — 1° Quand un point matériel assujetti à se mouvoir sur une courbe est soumis à une force dont la composante tangentielle est proportionnelle à la distance du mobile à un point fixe, distance comptée le long de la courbe, ce mobile décrit de part et d'autre de sa position d'équilibre des oscillations isochrones, quel que soit l'écart initial ou l'amplitude.

En effet, soit m la masse du mobile M (fig. 7), a la distance OA du point de départ à la position d'équilibre, distance comptée le long de la courbe ; x la distance OM du mobile au point O à une époque quelconque t ; la composante tangentielle F de la force a pour ex-

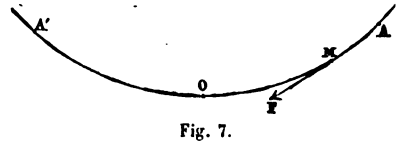


Fig. 7.

(1) *Phil. trans. abridged*, vol. XVIII, p. 388 (1798).

(2) Le mémoire de Cavendish renferme la note suivante : « M. Coulomb a appliqué la même méthode à l'étude de petites attractions dans un grand nombre de cas. Mais Mitchell m'avait parlé, avant la publication des expériences de Coulomb, de son projet d'exécuter des expériences analogues. »

pression

$$F = Kmx.$$

L'espace parcouru est $(a - x)$. On sait que l'accélération tangentielle est égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps, ou à la dérivée seconde de l'espace parcouru. On a donc aussi

$$F = m(a - x)'' = - mx'',$$

ce qui donne

$$x'' = - Kx.$$

La fonction qui satisfait à cette équation est

$$x = a \cos t \sqrt{K},$$

la constante étant nulle si l'on compte le temps à partir du moment où le mobile est en A. On voit d'après cette expression qu'au bout du temps T donné par la condition $T\sqrt{K} = \pi$, le mobile aura atteint son écart maximum de l'autre côte du point O, et sera venu en A′ à une distance égale à celle du point de départ. Ce temps T est la durée d'une oscillation simple, et l'on a

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{K}}.$$

On voit aisément que si la force qui agit sur le mobile augmente moins rapidement que la distance du mobile au point O, la durée des oscillations augmentera avec l'amplitude et que l'inverse aura lieu si la force croît plus vite que l'écartement du mobile.

Réciproquement, toutes les fois que les oscillations sont isochrones quelle que soit l'amplitude, on peut en conclure que la force tangentielle est proportionnelle à l'écart du mobile. C'est la loi qui régit les oscillations sonores et les vibrations par lesquelles on explique les phénomènes lumineux.

2° Considérons maintenant un corps solide pouvant tourner autour d'un axe et soumis à une force dont le moment par rapport à l'axe de rotation est proportionnel à l'angle dont le corps est écarté de sa position d'équilibre. Soit C (fig. 8) l'axe de ro-

tation, M le point d'application de la force F que nous supposerons tangente au cercle décrit par ce point et O la position du point d'application de la force quand le corps est en équilibre. Cette force a pour expression, en désignant par d la distance CM et par α la distance angulaire du corps à sa position d'équilibre,

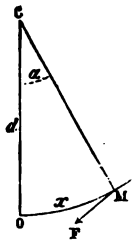


Fig. 8.

$$F = Kx = Kd\alpha.$$

On peut remplacer cette force F agissant au point M par un système quelconque de forces appliquées à différents points du corps solide, pourvu que la somme des moments de toutes ces forces par rapport à l'axe de rotation soit égale au moment de la force F elle-même. Nous allons appliquer à chaque élément du corps une force f tangente à la circonférence que décrit cet élément, proportionnelle à sa masse m, à sa distance à l'axe de rotation r et à l'angle de rotation α; cette force aura pour expression

$$f = Hmr\alpha.$$

Pour déterminer la constante H nous écrirons que la somme des moments de toutes ces forces est égale au moment de la force proposée, ce qui donne

$$\Sigma Hmr^2\alpha = Kd^2\alpha,$$

ou bien

$$H = \frac{\Sigma mr^2}{Kd^2}.$$

Σmr^2 est ce qu'on appelle le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation; on peut l'écrire sous la forme $M\rho^2$, M désignant la masse totale du corps et ρ le rayon de gyration, c'est-à-dire la distance à l'axe du point auquel il faudrait porter la masse totale pour que le moment d'inertie ne soit pas changé.

Si chacun des points du corps oscillait librement sous l'influence de la force fictive que l'on y a appliquée, la durée d'oscillation serait égale à $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$ comme on l'a vu plus haut; elle serait

donc la même pour tous les points, et par suite cette durée d'oscillation n'est autre chose que celle du corps lui-même. On a donc pour le corps solide

$$T = \pi \frac{1}{\sqrt{H}} = \pi \sqrt{\frac{M\rho^2}{Kd^3}}.$$

On peut remarquer que Kd étant la valeur de la force lorsque la déviation est égale à l'unité, son moment est alors égal à Kd^3. En désignant cette quantité par la lettre c, l'équation devient

$$T = \pi \sqrt{\frac{M\rho^2}{c}}.$$

Supposons en particulier que le corps solide soit soumis à une force P constante de grandeur et de direction (fig. 9), appliquée en un *même* point M. La composante tangentielle de cette force sera $P \sin \alpha$. Si l'on se borne à considérer des oscillations assez petites pour que l'on puisse remplacer le sinus par l'arc, cette composante tangentielle peut alors être exprimée par $P\alpha$ et son moment est $Pd\alpha$. Le corps est donc exactement dans le même cas que si le point M était soumis à une force tangente à la circonférence que décrit ce point, proportionnelle à la déviation, et dont le moment pour une déviation égale à l'unité serait Pd. La durée des oscillations est alors

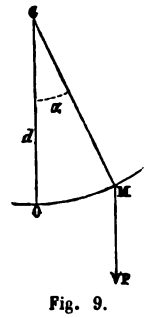


Fig. 9.

$$T = \pi \sqrt{\frac{M\rho^2}{Pd}}.$$

Dans le cas du pendule géodésique, cette force P n'est autre chose que le poids du pendule ; $\frac{P}{M}$ est l'accélération g de la pesanteur, d est la distance du centre de gravité du corps à l'axe de rotation, et la durée des oscillations est

$$T = \pi \sqrt{\frac{\rho^2}{gd}}.$$

C'est la formule du pendule composé.

S'il s'agit, au contraire, du pendule simple, c'est-à-dire réduit à un point matériel, les longueurs ρ et d sont égales à la longueur l du pendule, ce qui donne

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

on voit que, pour obtenir la longueur l d'un pendule simple, synchrone d'un pendule composé, il suffit d'écrire

$$l = \frac{\rho^2}{d}.$$

Nous aurons occasion de faire fréquemment usage de ces formules.

21. Expériences de Coulomb sur la torsion des fils métalliques. L'appareil dont se servait Coulomb pour étudier la torsion des fils est très simple (1). Un fil de métal est saisi à sa partie supérieure dans une pince attachée à une potence en bois. Ce fil porte à son extrémité inférieure une autre pince à laquelle est suspendu un cylindre de métal. Sur la planche qui sert de base est posé un cercle divisé en degrés et dont le centre est situé sur le prolongement du fil, un index collé au cylindre s'étend jusqu'aux divisions du cercle et indique les déviations.

Quand on tourne le cylindre d'un certain angle, et qu'on l'abandonne ensuite à lui-même, l'appareil revient, en vertu de la torsion du fil, vers sa position d'équilibre, et il exécute de part et d'autre des oscillations isochrones, mais dont l'amplitude diminue constamment.

Comme le fil reste vertical et que les oscillations sont isochrones quelle que soit l'amplitude, au moins entre des limites très étendues, il en résulte que l'ensemble des réactions élastiques du fil déformé par la torsion se réduit à un couple horizontal dont le moment est proportionnel à l'angle de torsion. On peut encore considérer le phénomène mécanique d'une autre manière. Le couple de torsion étant représenté par deux forces perpendiculaires à la droite qui joint leurs points d'application, si l'on applique l'une des forces $-f$ de ce couple sur le fil

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences*, p. 229 (1784).

lui-même, et l'autre $+f$ à l'extrémité d'un levier égal à l'unité, l'intensité de cette force sera représentée par le même nombre que le moment du couple primitif.

Supposons maintenant le poids du corps suspendu au fil assez grand par rapport aux forces de torsion, pour que la déviation que produirait la force $-f$, appliquée au fil, soit négligeable, on pourra supprimer cette force et considérer le fil comme étant soumis à une force unique $+f$ qu'on appelle la *force de torsion*.

Quant à la diminution rapide des amplitudes, elle peut être attribuée en partie à la résistance de l'air, mais elle est due surtout, comme l'a montré Coulomb, à l'imparfaite élasticité du fil. Sans aborder ce point de vue, cherchons seulement à évaluer les couples de torsion.

Coulomb a opéré sur trois sortes de fils de clavecin, tels qu'on les trouvait dans le commerce, et sur trois fils de laiton correspondant par le numéro et à peu près par la grosseur aux fils de fer. Le tableau suivant donnera une idée exacte des dimensions de ces fils et de leurs qualités élastiques.

NATURE DU FIL.	NUMÉRO DU COMMERCE	POIDS DU FIL POUR 6 PIEDS DE LONGUEUR	POIDS QU'IL PEUT SUPPORTER AVANT DE SE ROMPRE
Fer. . . .	12	5 grains	3 livres 12 onces.
	7	14 »	10
	1	56 »	53
Laiton. . .	12	5 »	2 5
	7	18,5 »	14
	1	66 »	22

Coulomb a ensuite suspendu à ces différents fils deux cylindres de plomb de même diamètre, pour qu'ils eussent le même rayon de gyration, dont l'un pesait une 1/2 livre et l'autre 2 livres. Il donnait au fil par le cylindre une torsion de plusieurs circonférences et déterminait avec soin la durée des oscillations à partir du moment où, par une réduction suffisante de l'amplitude, elles devenaient isochrones.

Voici le résumé des expériences :

NATURE DU FIL	LONGUEUR DU FIL	POIDS DU CYLINDRE SUSPENDU	LIMITE D'AMPLITUDE POUR L'ISOCHRONISME	DURÉE DE 20 OSCILLATIONS	AMPLITUDE INITIALE	OBSERVATIONS
Fer N° 12	9 pouces	0gr,5	180°	120″	3.560°	Les 10 premières oscillations se font en 62″ ou 63″ et l'amplitude est réduite à 450°.
Fer 12	»	2	180	242	»	
Fer 7	»	0,5	180	42	»	
Fer 7	»	2	180	85	»	
Fer 1	»	2	45	25	»	Le cylindre de 0gr,5 donne des oscillations irrégulières; le fil n'est pas assez tendu.
Laiton N° 12	»	0,5	360	220	3.360	Les 20 premières ont duré 225″ et la torsion était encore de 2.360.
Laiton 12	»	2	360	442	3.360	Les 20 premières ont duré 444″ et il restait encore plus de 2.360.
Laiton 7	»	0,5	360	57	»	
Laiton 7	»	2	360	110	2.360	Les 20 premières ont duré 111″ et il restait encore 540°.
Laiton 7	36	2	5.360	222	»	
Laiton 1	9	2	50	32	450	Les 20 premières ont duré 33″,5 et il restait 9°.

Les conséquences à déduire de ce tableau sont donc les suivantes :

1° Le couple de torsion est proportionnel à la déviation, mais pas d'une manière absolue. Quand la torsion est trop grande, les oscillations sont un peu plus lentes, ce qui indique que le moment de ce couple croît un peu moins vite que les angles de torsion.

2° Le couple de torsion est indépendant du poids tenseur. Le couple de torsion par un angle égal à l'unité ayant pour expression en fonction de la durée T des oscillations

$$c = \pi^2 r^2 \frac{M}{T^2},$$

si le couple c ne change pas, et si le rayon de gyration reste le même, la durée des oscillations doit être proportionnelle à la racine carrée de la masse. C'est ce que montrent les divers

groupes d'expériences 1 et 2, 3 et 4, 6 et 7, 8 et 9, dans lesquels la durée d'oscillation a doublé quand le poids du cylindre est devenu 4 fois plus grand. On remarque toutefois que la durée des oscillations devient en général un peu plus que double quand le poids est quadruplé, ce qui peut tenir en partie à l'allongement du fil.

3° Loi des longueurs. Dans les expériences 9 et 10, on voit que la longueur du fil devenant 4 fois plus grande, la durée des oscillations a doublé ; le couple de torsion était donc 4 fois plus faible, c'est-à-dire qu'il varie en raison inverse de la longueur du fil. Cette loi est d'ailleurs à peu près évidente. Si l'on maintient un fil tordu par deux couples égaux et de sens contraires appliqués aux deux extrémités, il est bien clair que la torsion au milieu du fil est la moitié seulement de la torsion totale, et que si l'on applique un des couples en ce point, le fil restant sera encore en équilibre.

4° Loi des diamètres. Coulomb est arrivé à cette loi par des considérations ingénieuses. Il fait observer que, si le diamètre d'un fil est doublé, le déplacement d'une molécule, toutes choses égales d'ailleurs, est deux fois plus grand et son bras de levier deux fois plus grand, ce qui exige déjà un couple dont le moment soit quadruple. En outre, le nombre des molécules dans chaque section est devenu quatre fois plus grand, ce qui fera multiplier encore par 4 le moment du couple. En définitive, ce moment sera donc 16 fois plus grand, c'est-à-dire proportionnel à la quatrième puissance du diamètre ou au carré de la section. Il en résulte que la durée des oscillations sera en raison inverse de la section ou, ce qui revient au même, en raison inverse du poids du fil pour une longueur déterminée.

Si, en effet, dans les expériences de Coulomb on prend toutes celles qui ont été faites avec un même poids tenseur de 2 livres, et si on multiplie la durée de 20 oscillations par le poids de 6 pieds de longueur du fil correspondant, on trouve les résultats suivants :

	N°	PRODUIT		N°	PRODUIT
Fer. . .	12	1210	Cuivre. .	12	2210
	7	1190		7	2035
	1	1288		1	2112

On voit d'après ce tableau que la loi est sensiblement vérifiée. Le défaut de concordance rigoureuse des résultats tient uniquement à ce que les fils que l'on compare ne sont jamais absolument identiques, les opérations mécaniques différentes qu'ils ont subies ayant suffi pour modifier leurs propriétés physiques et leur élasticité en particulier.

Les lois de torsion des fils peuvent donc, en appelant s la section d'un fil et l sa longueur, être représentées par la formule

$$c = C\frac{s^2}{l},$$

le coefficient C étant le couple de torsion pour un fil de même nature, de section égale à l'unité et de longueur égale à 1.

5° On peut déduire de ces expériences la valeur du couple c, pour le fil que l'on emploie, à l'aide du rayon de gyration du cylindre suspendu. Soit qu'il soit nécessaire de tenir compte de ce cylindre, le tableau précédent permet de déterminer le rapport des coefficients de torsion pour le fer et le cuivre. Ces coefficients étant en raison inverse des carrés des durées d'oscillation, la comparaison des résultats obtenus avec les fils du n° 12 donne pour leur rapport 3,35.

22. **Balance de Coulomb.** — C'est sur la connaissance des lois de torsion des fils métalliques que repose la construction de la balance électrique. Seulement comme les forces qu'il faut comparer sont extrêmement faibles, il fallait avoir recours à des fils beaucoup plus fins que ceux qui ont servi dans les expériences précédentes.

La balance employée par Coulomb pour l'étude des répulsions électriques est représentée fig. 10. Cette figure et la description que nous en donnons sont prises à peu près textuellement dans les mémoires de Coulomb (1).

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences*, p. 570 (1785).

Sur un cylindre de verre ABCD de 12 pouces de diamètre et de 12 pouces de hauteur, on place un plateau de verre AC de 13 pouces de diamètre percé de deux trous de 20 lignes à peu près de diamètre; sur celui du milieu est mastiqué un tube de verre de 24 pouces de hauteur. A l'extrémité supérieure de ce tube est placé un micromètre de torsion composé de trois pièces: l'une est une garniture H, mastiquée sur le tube de verre; la seconde est formée d'un disque MM′ divisé sur son champ en

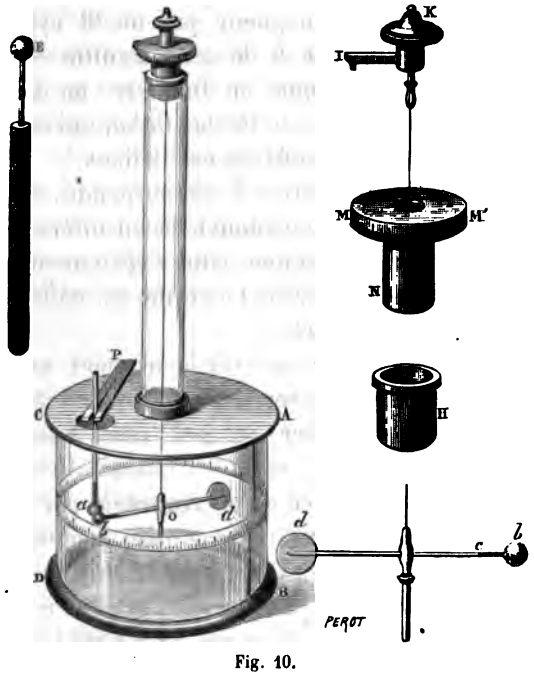


Fig. 10.

360 degrés et d'un tuyau de cuivre N qui entre dans la garniture H; le troisième est un bouton K qui s'engage dans une cavité du disque où il peut tourner et est muni d'un index I qui atteint les divisions du disque. Le fil de métal est saisi à sa partie supérieure par une sorte de pince ou porte-crayon attaché au bouton et porte à sa partie inférieure une autre pince dans laquelle est engagée une aiguille horizontale; cette pince doit être assez lourde pour tendre le fil sans le rompre. Le fil était en argent et avait 28 pouces de longueur; et l'on a reconnu, par les méthodes

rappelées plus haut, que pour donner à ce fil une torsion de 360°, il suffirait d'une force de $\frac{1}{540}$ de grain agissant à l'extrémité d'un levier de 4 pouces (environ $0^{milligr.},17$ à l'extrémité d'un levier d'un décimètre) ; un pied de longueur de ce fil ne pesait d'ailleurs que $\frac{1}{16}$ de grain (3 milligrammes environ) ; le diamètre du fil était d'environ $0^{mm},035$. L'aiguille qui est suspendue horizontalement à la moitié à peu près de la hauteur du grand vase qui la renferme est formée, ou d'un fil de soie enduit de cire d'Espagne, on d'une paille également enduite de cire d'Espagne et terminée de *c* et *b* sur 18 lignes de longueur par un fil cylindrique de gomme laque : à l'extrémité *b* de cette aiguille est une petite balle de sureau de 2 à 3 lignes de diamètre ; en *d* est un petit plan vertical de papier passé à la térébenthine, qui sert de contre-poids à la balle *b* et qui ralentit les oscillations.

Dans le second trou du couvercle est suspendu, à l'aide d'une pince en bois P, un petit cylindre dont la partie inférieure est aussi de gomme laque et qui porte une balle *a* également en sureau. Autour du vase, à la hauteur de l'aiguille, est collée une bande de papier divisée en 360 parties.

Pour commencer à opérer avec cet instrument, on fait correspondre le trou latéral du couvercle à peu près au zéro de la graduation sur la bande de papier ; on met l'index I du micromètre sur le zéro du disque gradué, et on fait tourner le disque sur le tube qui le soutient jusqu'à ce qu'en regardant par le fil vertical qui suspend l'aiguille et le centre de la balle, l'aiguille se trouve répondre au zéro du papier. On introduit ensuite la balle fixe exactement en face de ce même repère : l'aiguille a été alors un peu déplacée et la boule mobile se trouve appliquée sur la boule fixe par la petite torsion qu'a éprouvée le fil. La balance est prête à servir.

23. Considérons d'abord le cas des répulsions. On électrise un petit conducteur qui n'est autre chose qu'une épingle à grosse tête E enfoncée par sa pointe dans un bâton de cire d'Espagne ; on introduit cette épingle dans le trou du couvercle et on lui fait toucher la boule fixe. En retirant l'épingle, les deux balles sont électrisées et se repoussent mutuellement à une distance que l'on détermine en visant dans le plan qui passe par le fil et l'aiguille. Tournant alors le bouton supérieur dans un sens convenable, du

côté opposé à la déviation de l'aiguille mobile, on augmente la torsion du fil : la balle mobile se rapproche et on mesure la nouvelle distance. On observe par ce moyen la distance à laquelle différents angles de torsion ramènent la balle *b* vers la balle *a*, et en comparant les forces de torsion avec les distances correspondantes des deux balles, on détermine la loi de répulsion. La torsion totale du fil dans chaque expérience se compose de l'angle dont l'aiguille est déplacée et de l'angle dont on a tourné le bouton supérieur.

Coulomb a fait un grand nombre d'expériences à ce sujet et il a toujours trouvé que la torsion totale du fil est en raison inverse du carré de la distance de l'aiguille ; mais il n'a rapporté de résultats numériques que pour une seule expérience.

Les deux balles ayant été électrisées avec la tête d'épingle, et l'index du micromètre étant au zéro, l'aiguille s'est éloignée de 36°. La torsion du fil était aussi de 36°.

Ayant tordu le fil de 126° au moyen du bouton, les balles se sont rapprochées et arrêtées à 18° l'une de l'autre. La torsion du fil était alors de $126+18=144°$.

Ayant tordu le fil de 567°, l'aiguille est venue se fixer à 8°,5. La torsion totale du fil est $567+8,5=575°,5$.

Si la déviation eût été de 9° dans la troisième épreuve, les torsions se seraient trouvées égales à 36, 144 et 576, c'est-à-dire exactement proportionnelles à 1, 4 et 16, ou 1^2, 2^2 et 4^2, pendant que les déviations angulaires sont entre elles comme 1, 1/2 et 1/4.

Coulomb fait au sujet de cette expérience plusieurs observations. Et d'abord l'extrême ténuité du fil employé ici rendait les expériences très-difficiles ; la position d'équilibre pour une torsion nulle n'était pas certaine à quelques degrés près et le moindre ébranlement suffisait à le casser. Aussi Coulomb s'est servi souvent pour des expériences semblables d'un fil de diamètre presque double qui offrait beaucoup plus de résistance. La force de torsion était 14 ou 15 fois plus grande, mais l'équilibre s'établissait mieux et les résultats ont été les mêmes.

La torsion totale du fil étant en raison inverse du carré de la distance angulaire des boules, on peut en conclure, au moins comme première approximation, que la répulsion des boules

électrisées est en raison inverse du carré de la distance de leurs centres. En effet, la réaction du fil peut être remplacée, comme nous l'avons vu, par une force unique appliquée à la boule mobile, tangente à la circonférence que décrit cette boule et proportionnelle à la torsion. La répulsion électrique s'exerce suivant la corde de l'arc qui sépare les deux boules, mais à cause de la petitesse des angles, elle est peu inclinée sur la tangente, et par suite sensiblement égale à la force de torsion ; cette force répulsive est donc en raison inverse du carré de la distance angulaire des boules, ou bien, au même degré d'approximation, en raison inverse du carré de la distance rectiligne de leurs centres.

24. L'étude plus complète de l'expérience de Coulomb montre même que la conclusion est beaucoup plus rigoureuse qu'on ne pourrait le prévoir par ce raisonnement sommaire.

Il faut remarquer d'abord qu'il est impossible de soustraire un corps électrisé aux causes qui tendent à affaiblir peu à peu ses propriétés électriques, ou, en d'autres termes, à la déperdition de l'électricité, et malgré toutes les précautions prises pour isoler les boules, la déperdition n'était pas supprimée. Or, Coulomb a observé que, le jour même où cette expérience a été exécutée, lorsque la boule mobile était à la distance de 30° sous une torsion de 50°, cette boule se rapprochait de 1° en 3 minutes. Comme l'expérience relative aux variations de distance avait duré 2 minutes, l'erreur de 1/2 degré constatée dans la troisième épreuve était parfaitement explicable par la déperdition de l'électricité.

En second lieu, pour être autorisé à conclure de l'expérience que la loi du carré des distances est applicable à l'action réciproque de deux éléments électrisés, il faudrait que les boules fussent infiniment petites par rapport à la distance qui les sépare ; mais nous verrons bientôt que l'action exercée sur un point extérieur, par une sphère électrisée d'une manière uniforme, est la même que si toute l'électricité était concentrée au centre de la sphère, et que l'erreur commise en remplaçant chacune des deux boules par son centre dans l'expérience de Coulomb est en général insignifiante.

Enfin, si l'on réduit ainsi chacune des boules à son centre, le calcul exact des conditions d'équilibre ne présente plus aucune difficulté.

Prenons pour plan de figure le cercle que décrit l'aiguille mobile. Soit A (fig. 11) le centre de la boule fixe, B celui de la boule mobile, α la déviation angulaire, l le rayon du cercle, et T l'angle dont on a tourné l'index supérieur, de sorte que la torsion totale du fil est alors $T+\alpha$. A la répulsion f exercée par la boule fixe sur la boule mobile, nous pouvons ajouter, sans troubler l'équilibre de l'appareil, deux autres forces $+f'$ et $-f'$ égales et parallèles à la précédente, et appliquées au milieu de l'aiguille, en O. Les deux forces f et $-f'$ constituent un couple qui agit sur l'aiguille en sens inverse du couple de torsion du fil, et l'équilibre aura lieu quand les moments de ces deux couples seront égaux.

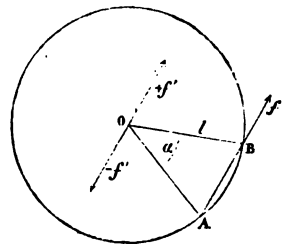


Fig. 11.

Quant à la force $+f'$, elle tendra à dévier le fil de la verticale, mais cet effet sera très-faible à cause de l'extrême petitesse des forces électriques, et d'ailleurs la déviation angulaire n'en sera pas modifiée.

En désignant par c le moment du couple de torsion du fil pour un angle égal à l'unité, le moment du couple de torsion du fil est égal à $c(T+\alpha)$; le moment du couple f et $-f'$ est $fl\cos\frac{\alpha}{2}$; on a donc

$$c(T+\alpha)=fl\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Si la force répulsive f est en raison inverse du carré de la distance, on pourra la représenter par $\frac{\varphi}{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, φ étant la répulsion des boules à l'unité de distance; et l'équation précédente devient

$$c(T+\alpha)=\varphi\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{4l\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

ou bien

$$(T+\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varphi}{4lc}.$$

Si la loi des distances est exacte, le premier membre de cette équation devra être constant pour toutes les expériences exécutées avec une même charge électrique.

On voit maintenant que la relation approchée à laquelle on est arrivé ne diffère pas sensiblement de ce que donne la formule exacte. En effet, dans les limites où les expériences ont été faites, on ne commet pas d'erreur appréciable en remplaçant le sinus et la tangente de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ par le carré de l'angle. Pour une déviation de 36°, on aurait

$$\sin\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 0{,}1004,$$

et

$$\frac{\alpha^2}{4} = 0{,}0987\ ;$$

l'erreur commise en substituant une de ces valeurs à l'autre est donc plus petite que $\frac{1}{50}$, et la précision de l'expérience ne peut guère dépasser cette limite. Le produit $(T+\alpha)\alpha^2$ est donc constant dans toutes les expériences d'une même série, ou bien la torsion totale est en raison inverse du carré de la distance angulaire. D'ailleurs, si l'on applique le calcul exact aux expériences de Coulomb, on obtient les résultats suivants :

EXPÉRIENCES	T	α		DIFFÉRENCE
		OBSERVÉ.	CALCULÉ	
1	0°	36°	»	»
2	126°	18°	18°6′	+ 6′
3	567°	8°30′	9°5′	+ 35′

Le calcul des déviations a été fait en partant de la première observation. La différence de 6′ pour la seconde expérience est inappréciable; la troisième expérience donne une différence de 35′ en partie explicable par la déperdition de l'électricité.

M. Riess (1) a fait des expériences analogues avec une balance

(1) *Reibungselectricität*, bl. I, p. 92.

semblable dont le fil n'avait que 20 pouces de longueur, mais il ne s'est pas attaché comme Coulomb à obtenir des nombres simples. Voici le tableau de ces expériences et du calcul des angles déduit de la formule exacte en prenant la première observation pour base :

EXPÉRIENCES	T	α		DIFFÉRENCE
		OBSERVÉ.	CALCULÉ	
1	0°	42°	»	»
2	70°	28°	27°44′	— 16′
3	110°	23°	23°42′	+ 42′

Les expériences ne sont pas aussi concordantes que celles de Coulomb, mais les différences peuvent encore être mises sur le compte des erreurs expérimentales et de la déperdition.

25. Le même appareil peut servir à établir la loi des attractions électriques. Pour cela, on électrise d'abord la boule mobile et on l'éloigne de la boule fixe en tournant l'index supérieur d'un certain angle; on charge ensuite la boule fixe d'électricité différente. La boule mobile est alors attirée vers la boule fixe, et peut se maintenir en équilibre à une certaine distance, si l'attraction électrique est contre-balancée par la torsion du fil. Soit, par exemple, a l'angle dont on a tourné l'index, F la force qu'il faudrait appliquer à la boule mobile tangentiellement à la circonférence qu'elle décrit pour tordre le fil d'un angle égal à l'unité, x la distance angulaire des deux boules quand l'équilibre est établi, et φ l'attraction des deux boules à l'unité de distance. La torsion du fil est $a - x$, et, si la déviation est assez faible pour que l'on puisse appliquer les formules approchées, on doit avoir

$$F(a - x) = \frac{\varphi}{x^2},$$

d'où

$$x^2(a - x) = \frac{\varphi}{F}.$$

Cette équation n'est possible, pour une valeur donnée de la

torsion initiale a, que si la valeur maximum du premier membre est supérieure à la valeur constante du second. En égalant à zéro la dérivée du premier membre par rapport à x, on obtient

$$2x(a-x)-x^2=0,$$

ce qui donne

$$x=\frac{2a}{3}.$$

Cette valeur de x correspond au maximum du premier membre de l'équation, lequel est alors égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3}\right)^3$.

Pour que l'équilibre soit possible, il faut donc que l'on ait

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3}\right)^3>\frac{\varphi}{F},$$

ou

$$a^3>\frac{27}{4}\cdot\frac{\varphi}{F}.$$

Quand cette condition n'est pas remplie, la boule mobile se précipite sur la boule fixe, et le contact des boules peut même avoir lieu lorsque l'équilibre est possible, si les oscillations sont trop étendues et amènent la boule mobile trop près de la boule fixe. Coulomb a fait quelques expériences par cette méthode, et vérifié aussi la loi du carré des distances, mais il déclare qu'on en manque beaucoup et que l'emploi d'un corps isolant destiné à empêcher le contact des deux boules ne réussit pas davantage parce que l'aiguille adhère à cet obstacle, et que l'on perd ainsi du temps et de l'électricité.

26. Une discussion plus complète de la formule fait mieux encore comprendre la difficulté des expériences. Écrivons l'équation sous la forme

$$a-x=\frac{\frac{\varphi}{F}}{x^2}=\frac{b}{x^2},$$

et rapportons à des axes rectangulaires les deux courbes

$$(1)\qquad y_1=\frac{b}{x^2},$$

$$(2)\qquad y_2=ax.$$

Les positions d'équilibre correspondront aux points d'intersection de ces deux courbes. La première (1) est une courbe hyperbolique à deux branches (fig. 12) ayant pour asymptotes l'axe des x d'une part et la partie positive de l'axe des y. La branche située dans le quadrant de gauche ne convient pas au problème puisque la variable x ne peut pas recevoir physiquement de valeurs négatives ; on l'a seulement pointillée.

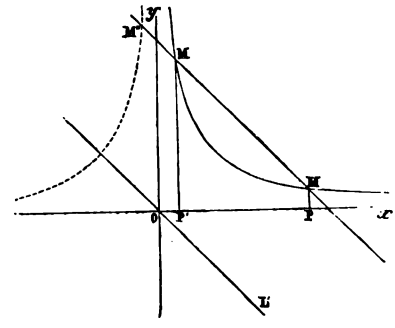


Fig. 12.

La courbe (2) est une droite inclinée à 45° sur les axes de coordonnées. Si $a = o$, cette droite est OL ; elle ne rencontre pas la branche de droite de la première courbe et l'équilibre ne peut avoir lieu, ce qui était d'ailleurs évident. Si la valeur de a est suffisamment grande, la droite (2) prend une position telle que MM'', et elle coupe la première branche de la courbe en deux points M et M'. L'abscisse OP qui correspond au point M donne lieu à une position d'équilibre, et cet équilibre est stable. En effet, si l'on donne à x une valeur supérieure à OP, l'ordonnée de la droite y sera plus petite que celle de la courbe, la force de torsion sera inférieure à l'attraction, et la boule mobile sera ramenée vers sa position d'équilibre ; de même si la valeur de x était inférieure à OP, l'ordonnée de la courbe serait plus petite que celle de la droite, l'attraction serait plus faible que la force de torsion, et la boule mobile serait encore ramenée vers sa position d'équilibre. Le point M' est encore une solution, mais correspond à un équilibre instable ; la boule mobile se précipitera vers la boule fixe si sa distance devient inférieure à OP', et elle retournera vers l'autre position d'équilibre M, si sa distance est supérieure à OP'. Quant à la troisième solution M'', elle ne convient pas au problème physique. On voit donc que, même pour cette valeur de a, les oscillations de l'aiguille devront être inférieures à PP', sans quoi elle sortirait du champ d'équilibre stable.

Ainsi on ne peut pas expérimenter avec des valeurs de a trop

voisines de sa valeur minimum, parce que l'équilibre stable serait alors très-difficile à maintenir, et si, d'autre part, on donne à a des valeurs beaucoup plus grandes, les positions d'équilibre sont trop éloignées, le calcul approché n'est plus suffisant, et la sensibilité de l'appareil diminue beaucoup. En définitive, l'expérience n'est possible qu'entre des limites très-restreintes, et la vérification de la loi n'est pas alors satisfaisante.

27. **Méthode des oscillations.** — Pour vérifier la loi des attractions, Coulomb a employé de préférence une autre méthode [1] qui, « quoique moins simple et moins directe que la première, demande moins de soin et de précautions pour réussir. Elle consiste à suspendre une aiguille horizontalement, dont l'extrémité seulement soit électrisée, et qui, présentée à une certaine distance d'un globe électrisé, d'une nature différente d'électricité, est attirée et oscille en vertu de l'action de ce globe : l'on détermine ensuite par le calcul, d'après le nombre des oscillations dans un temps donné, la force attractive à différentes distances, comme on détermine la force de la gravité par les oscillations d'un pendule ordinaire. »

Coulomb reconnut d'abord qu'un fil de soie tel qu'il sort du cocon et qui peut porter jusqu'à 80 grains ($4^{gr},24$) sans se rompre, a une telle flexibilité de torsion que pour tordre d'une circonférence entière une longueur de ce fil de 3 pouces, il ne faut le plus souvent qu'une force de $\frac{1}{60000}$ de grain (moins de $\frac{1}{1000}$ de milligramme) agissant avec un levier de 7 à 8 lignes (16 à 18 millimètres) ; de sorte que si, par le moyen d'une force quelconque, on fait faire des oscillations à une aiguille suspendue par un pareil fil, la force de torsion ne pourra influer que d'une manière insensible sur la durée des oscillations, quand même la force extérieure ne serait que d'un centième de grain ($0^{milligr.},53$).

Coulomb suspend une aiguille de gomme laque (fig. 13) à un fil de soie de 7 à 8 pouces de longueur, d'un seul brin, tel qu'il sort du cocon ; à l'extrémité est fixé perpendiculairement à l'aiguille un petit cercle C de 8 à 10 lignes de diamètre, très-léger et tiré d'une feuille de papier doré. Le fil de soie est atta-

[1] *Mémoires de l'Académie des sciences*, p. 581 (1785).

ché à l'extrémité inférieure d'une petite baguette séchée au four et enduite de gomme laque ou de cire d'Espagne ; cette baguette est saisie par une poupée à pince qui coule le long d'une règle divisée OE et s'arrête à volonté au moyen de la vis V.

En face de cette aiguille est disposé un globe G de cuivre ou de carton couvert d'étain, porté par quatre piliers en verre, enduits de cire d'Espagne et surmontés chacun, pour rendre l'isolement plus parfait, de quatre bâtons de cire d'Espagne, de trois à quatre pouces de longueur. Ces quatre piliers sont portés comme

Fig. 13.

le montre la figure, sur une tablette à coulisse que l'on peut élever et fixer à une hauteur convenable.

Cela étant, on place le globe de manière que son centre soit sur le prolongement de l'aiguille, qui est éloignée de quelques pouces. On donne une étincelle électrique au globe par une bouteille de Leyde, et on touche la plaque C par un corps conducteur ; cette plaque se trouve ainsi chargée par influence d'électricité contraire. Quand on retire le conducteur, le globe agit par attraction sur l'aiguille et celle-ci exécute de part et d'autre de sa position d'équilibre des oscillations auxquelles on ne laisse qu'une faible amplitude pour qu'elles soient isochrones.

Le globe avait un pied de diamètre, la plaque C 7 lignes, l'aiguille de gomme laque 15 lignes de longueur et le fil de cocon 8 pouces.

L'appareil étant chargé, on a évalué la durée de 15 oscillations lorsque la plaque était à différentes distances du globe, comme l'indique le tableau suivant :

DISTANCE DE LA PLAQUE A LA SURFACE DE LA BOULE	DISTANCE DE LA PLAQUE AU CENTRE DE LA BOULE	DURÉE DE 15 OSCILLATIONS	RAPPORT DE LA DURÉE DES 15 OSCILLATIONS A LA DISTANCE AU CENTRE
3 pouces	9 pouces	20″	2,22
12 »	18 »	41	2,28
18 »	24 »	60	2,50

Avant d'aller plus loin, on peut remarquer d'abord que les rapports indiqués dans la dernière colonne sont à peu près égaux, quoiqu'ils augmentent d'une manière sensible; mais la déperdition de l'électricité est en grande partie cause de ce changement. Les trois observations ont exigé à peu près 4 minutes, et le jour de cette expérience, la diminution de l'électricité était d'environ $\frac{1}{40}$ par minute, ce qui fait $\frac{1}{10}$ de perte pour la troisième observation. Comme la durée des oscillations est en raison inverse de la racine carrée de la force, on aurait dû, dans cette dernière observation, trouver une durée de $60\ \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}}$ ou 57 secondes, ce qui aurait donné le rapport 2,37.

En d'autres termes, si la durée des oscillations eût été exactement proportionnelle à la distance de la plaque au centre de la boule, on aurait trouvé pour durée des 15 oscillations 20″, 40″ et 53″,3, au lieu de 20, 40 et 57 que l'on peut considérer comme étant les nombres de l'expérience, corrigés de l'influence de la déperdition. La différence de $\frac{1}{20}$ que l'on constate pour le dernier nombre tombe dans les limites des erreurs d'observation. En effet, l'expérience ne réussit que si l'atmosphère est parfaitement sèche, si l'on évite avec soin tout courant d'air et si l'on

éloigne tout conducteur étranger à la distance d'au moins trois pieds.

28. Cette relation expérimentale une fois établie, il faut en déduire la loi élémentaire des actions électriques. Nous nous appuierons sur le théorème suivant :

Quand tous les points d'une surface sphérique agissent, par une force attractive ou répulsive en raison inverse du carré des distances, sur un point extérieur placé à une distance quelconque de cette surface, l'action est la même que si toute la masse agissante était concentrée au centre de la sphère.

Ce théorème dû à Newton est tellement important qu'il est utile d'en donner ici une démonstration directe.

Soit μ la masse contenue dans une étendue de surface de la sphère égale à l'unité, m la masse du point extérieur, $\varphi \frac{m\mu d\sigma}{\rho^2}$ l'action exercée sur ce point par un élément de surface $d\sigma$ situé à la distance ρ.

Soit O (fig. 14) le centre de la sphère dont le rayon est R, MM' l'élément $d\sigma$, et A le point extérieur dont la distance OA au centre est D. La force $\varphi \frac{m\mu d\sigma}{\rho^2}$ que nous supposerons attractive pour fixer les idées, est dirigée du point A vers le point M. Comme la résultante des actions de la sphère est évidemment dirigée vers le centre, il suffira de considérer la composante dirigée vers le centre $\varphi \frac{m\mu d\sigma}{\rho^2} \cos\alpha$ de chacune des actions élémentaires et d'en évaluer la somme.

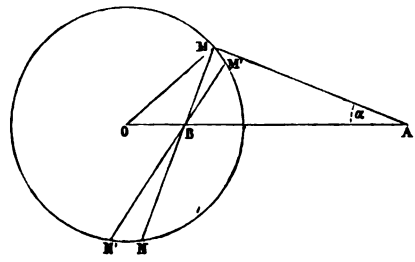


Fig. 14.

Considérons pour cela le point B conjugué du point A, c'est-à-dire situé sur la droite OA de telle manière que l'on ait

$$OB \times OA = R^2.$$

On obtient ce point B en menant du point A une tangente au cercle et abaissant du point de contact une perpendiculaire sur

la droite OA ; le point B est le pied de cette perpendiculaire.

En joignant MB, on forme deux triangles OMB, OAM, qui sont semblables comme ayant même angle en O, et les côtés qui le comprennent proportionnels, car on déduit de l'équation précédente

$$\frac{OB}{R} = \frac{R}{OA};$$

par suite, l'angle OMB est égal à l'angle α.

Décrivons du point B comme centre une sphère de rayon r égal à BM et désignons par $d\omega$ l'angle sur lequel on voit du point B l'élément $d\sigma$. L'élément de surface découpé par cet angle solide sur la sphère de rayon r sera $r^2 d\omega$. Les deux éléments de surface $r^2 d\omega$ et $d\sigma$ font aussi l'angle α puisqu'ils sont respectivement perpendiculaires aux droits BM et OM, ce qui donne

$$r^2 d\omega = d\sigma \cos\alpha.$$

On en déduit

$$\varphi \frac{m\mu d\sigma}{\rho^2} \cos\alpha = \varphi m\mu \frac{r^2}{\rho^2} d\omega.$$

Or, le rapport $\frac{r}{\rho}$ est constant, car la similitude des mêmes triangles donne aussi

$$\frac{BM}{MA} = \frac{OM}{OA}, \text{ ou } \frac{r}{\rho} = \frac{R}{D}.$$

La composante dirigée vers le centre de l'action exercée par l'élément MM′ a donc pour expression

$$\varphi m\mu \frac{R^2}{D^2} d\omega.$$

On voit déjà que cette composante est la même que celle qui provient de l'action de l'élément NN′ opposé du premier par rapport au point B.

L'action de la surface sphérique tout entière est la somme de toutes les expressions semblables relatives à tous les éléments

de la surface, c'est-à-dire

$$\varphi m\mu \frac{R^2}{D^2} \Sigma d\omega = \varphi m\mu \frac{R^2}{D^2} 4\pi = \varphi m \frac{4\pi R^2 \mu}{D^2}.$$

Cette action est donc la même que si la masse entière $4\pi R^2\mu$, répandue sur la surface sphérique, agissait sur le point A à la distance OA.

Si l'on considère maintenant une sphère non réduite à sa surface, mais composée de couches concentriques homogènes, on pourra répéter le même raisonnement pour une série de couches infiniment minces dans lesquelles on décomposera la masse totale. Le théorème étant applicable à chacune des couches, la résultante sera la même que si toute la masse agissante était concentrée au centre de la sphère.

Si les actions électriques suivent la loi du carré des distances, comme l'électricité est distribuée sur la boule de l'expérience précédente, sinon uniquement à la surface, du moins en couches concentriques homogènes (l'influence de la petite charge de l'aiguille ne pouvant pas produire de trouble sensible dans cette distribution), cette boule doit agir sur le pendule comme si toute l'électricité qu'elle possède était concentrée en son centre.

Dès lors, les oscillations de l'aiguille étant très-petites, comme nous l'avons supposé, la distance de la plaque au centre de la boule ne change pas sensiblement et la direction de la force elle-même varie très-peu. L'aiguille est donc soumise à une force sensiblement constante de grandeur et de direction et oscille comme un pendule géodésique. La durée T des oscillations sera donnée par la formule

$$T = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{Fl}},$$

dans laquelle Σmr^2 est le moment d'inertie de l'aiguille par rapport au fil de suspension, l la longueur de l'aiguille, et F la force exercée sur la petite plaque électrisée. Si T′ est la durée des oscillations de la même aiguille soumise à une autre force F′, on aura

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{F'}{F}}.$$

Les actions de la boule étant en raison inverse du carré des distances D et D′ de la plaque au centre de la boule, on a aussi

$$\frac{F'}{F} = \frac{D^2}{D'^2}, \text{ ou } \sqrt{\frac{F'}{F}} = \frac{D}{D'}$$

On déduit de là

$$\frac{T}{T'} = \frac{D}{D'}.$$

Les durées des oscillations de l'aiguille doivent donc être proportionnelles aux distances de la plaque au centre de la boule, ce qui est conforme à l'expérience.

La réciproque des raisonnements que nous venons d'indiquer est d'ailleurs exacte. Si l'on démontre, par expérience, que l'action d'une sphère sur un point extérieur est en raison inverse du carré de la distance du centre de la sphère au point considéré, on peut en conclure que les forces élémentaires obéissent également à la loi du carré des distances.

On peut remarquer que le même théorème s'applique aussi à l'action réciproque de deux sphères A et B composées de couches concentriques homogènes. En effet, l'action de l'une des sphères A sur chacun des points de la seconde est la même que si la masse de cette première sphère était concentrée en son centre; on n'a plus alors à considérer que l'action d'un point sur une sphère, et l'action réciproque se réduit à celle des centres où l'on aurait concentré séparément les masses des deux sphères considérées. Dans la balance de Coulomb, par exemple, on est donc autorisé à remplacer les deux boules électrisées par leurs centres, comme on l'avait fait par un raisonnement approximatif. Toutefois cette conclusion n'est rigoureuse que si l'électricité que possède chacune des boules peut être considérée comme symétrique par rapport au centre, et une telle distribution de l'électricité ne peut plus être admise si le diamètre des boules n'est pas assez petit par rapport à la distance qui les sépare.

La méthode des oscillations peut être employée pour vérifier la loi des répulsions électriques, mais Coulomb a trouvé que toutes les expériences dans lesquelles on fait agir l'électricité par

sa force répulsive, s'exécutent d'une manière plus simple, plus exacte et plus commode au moyen de la balance.

29. **Loi des quantités d'électricité.** — Pour étudier la manière dont varient les forces électriques avec les quantités d'électricité mises en présence, il faut d'abord définir ces quantités elles-mêmes et indiquer comment on pourra obtenir sur un corps une charge électrique double ou triple d'un autre. La question peut être envisagée de deux manières différentes. Si, par analogie avec les définitions adoptées pour la mécanique générale, on considère les masses électriques ou les quantités d'électricité comme proportionnelles aux forces, on ne fera plus que traduire une définition en disant que les forces électriques sont proportionnelles aux quantités d'électricité. L'expérience indique que lorsqu'une sphère conductrice électrisée est mise en contact avec une autre sphère identique à l'état neutre, l'action exercée sur un corps extérieur par chacune d'elles, après leur séparation, est la même et égale à la moitié de celle qu'exerçait la sphère primitive. Les charges ou les masses électriques de ces deux sphères sont donc égales entre elles et moitié moindres que celle de la première.

En se plaçant à un autre point de vue, on peut admettre que lorsqu'une sphère conductrice électrisée est mise en contact avec une autre à l'état neutre, la quantité totale d'électricité ne change pas, de sorte que chacune des sphères possède alors la moitié de la quantité d'électricité qui se trouvait primitivement sur la première. Cette proposition ne peut pas faire de doute, si l'électricité est un fluide matériel répandu dans les corps électrisés; ce fluide doit se partager en deux moitiés égales entre les sphères en contact. Mais la proposition cesse d'être évidente quand on remarque que la nature de l'électricité reste encore douteuse. Si cet agent est un phénomène de mouvement, de vibration, une force vive dans un état inconnu, pouvant éprouver des transformations par le seul fait d'une communication par conductibilité, etc., on ne sait plus quelle fraction de la charge primitive restera sur l'une des deux sphères. L'expérience montrant que l'action exercée sur un corps extérieur par chacune des sphères séparées l'une de l'autre est moitié moindre que celle de la sphère primitive, on peut dire cette fois que l'action exercée par un

corps est proportionnelle à la quantité d'électricité qu'il possède.

Coulomb (1) admet comme évident le partage de l'électricité par moitiés égales entre deux conducteurs identiques, et il a vérifié par expérience que ce partage est indépendant de la nature des corps, pourvu qu'ils soient conducteurs. Il a suspendu dans la balance une petite balle de cuivre de 8 lignes de diamètre, et les deux balles étant électrisées à la manière ordinaire, l'aiguille a été chassée à peu près vers 48°. Au moyen du bouton du micromètre, on a tordu le fil de suspension de 120° et l'aiguille s'arrêta après quelques oscillations à 28° ; la torsion totale du fil était alors de $28 + 120 = 148°$. On fit alors toucher la boule fixe par une boule de moelle de sureau de même diamètre également isolée et on enleva cette dernière. L'aiguille s'est rapprochée de la balle de cuivre et, pour le ramener à la même distance de 28°, il fallut détordre le fil de façon que le micromètre ne marquât plus que 44° ; la torsion totale était alors $44 + 28 = 72°$. Pour la même déviation, la torsion totale était donc de 148° dans le premier cas, et d'environ moitié moins, de 72°, dans le second. Mais la diminution de force répulsive était ce jour-là de $\frac{1}{60}$ par minute, et, comme l'expérience avait duré une minute, le dernier résultat aurait dû être, s'il n'y avait pas eu de déperdition, de 73°,5, c'est-à-dire aussi exactement que possible, la moitié du premier.

Comme la distance des boules est restée la même, la force répulsive était exactement proportionnelle à la torsion totale du fil. La boule fixe n'ayant plus dans le second cas que la moitié de sa charge primitive, il en résulte que la répulsion électrique entre deux corps électrisés est proportionnelle à la quantité d'électricité que possède chacun d'eux, et, par suite, au produit des charges électriques des deux corps.

Coulomb a montré que l'égalité de partage a lieu aussi bien entre deux corps d'une même forme quelconque, pourvu qu'ils soient symétriquement placés par rapport au point de contact, et que cela est encore vrai, même pour des corps médiocres conducteurs, si l'on a soin de faire durer le contact assez long-

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences*, p. 69 (1786).

temps. Ainsi un disque de fer de 10 lignes de diamètre a perdu exactement la moitié de sa charge quand on l'a touché avec un disque de papier de même diamètre; mais il faut alors que le contact dure plusieurs secondes.

30. On pourrait de même vérifier la loi des quantités d'électricité ou du partage électrique entre deux corps par les attractions électriques en employant la méthode des oscillations. La boule fixe et le disque de l'aiguille étant électrisés de manières différentes, on déterminerait la durée T d'un certain nombre d'oscillations. On toucherait ensuite la boule avec une autre sphère conductrice de même diamètre, et, enlevant cette sphère auxiliaire, on déterminerait la durée T′ du même nombre d'oscillations.

Entre ces durées T et T′ et les forces F et F′ qu'exerce la boule dans les deux cas, on a la relation

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{F'}{F}}.$$

La charge électrique de la boule fixe étant diminuée de moitié dans la seconde expérience, on doit avoir

$$\frac{F'}{F} = \frac{1}{2},$$

et, par suite,

$$T'^2 = 2T^2.$$

Telle serait la relation expérimentale à vérifier entre les durées d'un même nombre d'oscillations dans les deux expériences, abstraction faite de la déperdition.

En résumé, on peut conclure de ces expériences que *l'action de deux éléments de volume électrisés est proportionnelle au produit des quantités d'électricité qui se trouvent dans ces deux éléments et en raison inverse du carré de leur distance.*

31. **Expériences postérieures à celles de Coulomb.** — Les lois énoncées par Coulomb ont été immédiatement admises sans contestation, et toutes les expériences ultérieures ainsi que les conséquences déduites des théories basées sur ces lois ne faisaient qu'en confirmer de plus en plus l'exactitude; mais

M. Harris (1) les a mises en doute en leur opposant les résultats d'expériences faites dans des conditions qu'il n'est pas inutile de discuter.

M. Harris a employé une balance de torsion nouvelle, dans laquelle l'aiguille était suspendue par deux fils de cocon parallèles, au lieu du fil métallique employé par Coulomb.

L'aiguille (fig. 15), de 10 pouces de longueur, est formée de deux fils de verre nm', $n'm$ réunis par un tube de laiton $m'n'$ et porte à ses extrémités : d'une part, un petit disque de bois doré m, et de l'autre un contre-poids n en verre. Cette aiguille est suspendue au double fil de cocon par deux crochets b et b' ; elle porte en outre une tige de laiton oo' à laquelle est attachée une autre aiguille VV' perpendiculaire à la première et destinée à indiquer les déviations sur un cercle divisé A. La même tige se termine à la partie inférieure par une petite cavité dans laquelle entre une pointe fixe i, afin d'éviter les déplacements latéraux. Le disque fixe est aussi un morceau de bois doré p porté par une tige isolante. Dans cet appareil, on détermine la distance angulaire de deux corps électrisés ainsi que la torsion totale de la suspension bifilaire par des dispositions mécaniques assez compliquées, dont la figure n'indique que les parties essentielles. La déviation du disque mobile m est donnée par le déplacement de l'aiguille VV' par rapport au cercle fixe A. Le disque fixe p est porté par un cercle mobile B, dont la rotation peut être indiquée à l'aide d'un repère latéral fixe ou par une tige t terminée en

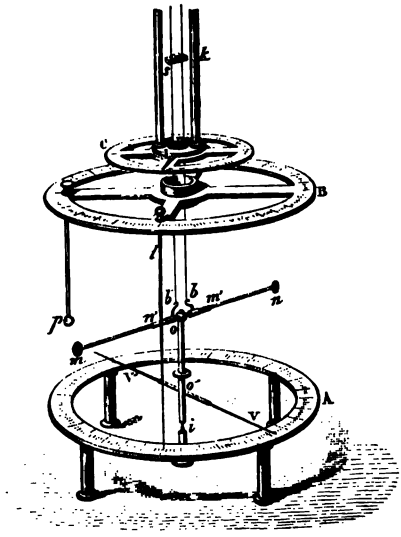


Fig. 15.

(1) *Phil. trans.*, part. II, p. 417 (1856).

pointe à une petite distance des divisions du cercle fixe A. Les fils de cocon sont attachés à la partie supérieure d'un châssis qui peut tourner sur un troisième cercle fixe C et dont la rotation est donnée par un index I. On voit, d'après cela, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans d'autres détails, comment s'effectuent toutes les mesures (1).

La théorie de la suspension bifilaire est très-simple. Si l'aiguille n'est soumise à aucune force extérieure, elle est en équilibre lorsque les deux fils sont dans un même plan vertical. Quand l'aiguille est déplacée de cette position, elle se relève un peu, les fils s'étant inclinés sur la verticale, et l'influence de la pesanteur tend à ramener l'aiguille vers sa position d'équilibre en produisant un couple qu'il est facile d'évaluer.

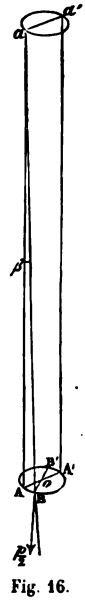


Fig. 16.

Soient aa' (fig. 16) les deux points de suspension des fils, B et B′ les points d'attache inférieurs, l'aiguille étant déviée, A et A′ les points où les verticales menées par a et a' rencontrent le plan horizontal mené par BB′. Désignons par α la déviation angulaire AoB de l'aiguille et par β l'inclinaison des cordons AaB. Si le corps suspendu au système bifilaire est bien équilibré, son centre de gravité est en o, et l'on peut remplacer son poids p par deux forces égales à $\frac{p}{2}$ appliquées l'une en B et l'autre en B′.

La force $\frac{p}{2}$ appliquée en B peut être décomposée en deux autres, l'une parallèle au cordon aB, qui tendra le fil, l'autre dirigée vers le point A et égal à $\frac{p}{2}\operatorname{tang}\beta$.

En désignant par r la demi-distance BB′, le moment de cette dernière force est

$$\frac{p}{2}\operatorname{tang}\beta\, r\cos\frac{\alpha}{2}.$$

La même chose a lieu au point B′ et ces deux composantes ho-

(1) Voir le *Traité d'électricité et de magnétisme* de M. Becquerel, t. V, 2e partie, p. 63.

rizontales donnent un couple dont le moment est

$$pr \operatorname{tang} \beta \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Les angles β et α sont liés entre eux par une relation assez simple. En désignant par l la longueur du fil, les deux triangles AaB et AoB donnent

$$AB = l \sin \beta = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Comme l'angle β est toujours très-petit, on peut remplacer la tangente par le sinus, et il vient

$$pr \operatorname{tang} \beta \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{p}{l} r^2 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{p}{l} r^2 \sin \alpha.$$

En toute rigueur il faut ajouter encore à cela le couple qui provient de la torsion du fil lui-même. Si l'on désigne par $c\alpha$ le moment du couple de torsion de chacun des fils, il en résulte que le moment du couple résultant, qui tend à ramener l'aiguille vers sa position d'équilibre, est

$$\frac{p}{l} r^2 \sin \alpha + 2c\alpha.$$

La loi des oscillations est, comme on le voit, assez compliquée dans le cas général. Si, comme cela a lieu pour des fils de cocon, on peut négliger le second terme $2c\alpha$, l'autre étant proportionnel à $\sin \alpha$, l'appareil oscillera comme un pendule géodésique, et il n'y aura isochronisme que pour les très-petites oscillations. La durée de ces oscillations est alors, en désignant par ρ le rayon de gyration du corps suspendu,

$$T = \pi \sqrt{\frac{\frac{p}{g}\rho^2}{\frac{p}{l} r^2}} = \pi \frac{\rho}{r} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

M. Harris a vérifié en effet que la durée des oscillations de cet appareil est proportionnelle à la racine carrée de la longueur des fils et en raison inverse de leur distance. Il a trouvé aussi

les oscillations isochrones pour toutes les déviations, ce qui n'est pas conforme au calcul précédent.

On voit aussi que la durée d'oscillation est proportionnelle au rayon de gyration du corps suspendu aux deux fils et indépendante de son poids.

Cette balance bifilaire ne paraît présenter aucun avantage sur l'appareil de Coulomb. En effet, la construction en est beaucoup plus compliquée et la théorie moins simple. Si les deux fils sont libres, la torsion totale ne peut pas dépasser 180°, sans quoi les fils viendraient se toucher, et à partir de ce moment la loi de torsion serait tout à fait modifiée. Il est vrai que, pour parer à cet inconvénient, M. Harris a placé entre les fils, de distance en distance, de petits arrêts *s* (fig. 15) en paille ou en liége qui empêchent ces contacts de se produire, et c'est à cause de cette circonstance que le couple de torsion a été à peu près proportionnel à l'angle de torsion pour des angles qui allaient jusqu'à 300 degrés.

Dans la balance de Coulomb la sensibilité est indépendante du poids de l'aiguille et ne dépend que de la nature du fil. Ici, au contraire, la sensibilité est d'autant plus faible que le poids de l'aiguille est plus grand, et la disposition compliquée de M. Harris avait amené le poids total de l'aiguille à 480 grains (1), environ $25^{\text{grammes}},5$. Si l'on suppose que les fils aient 1 mètre de longueur et qu'ils soient écartés seulement de 2 millimètres, conditions qu'il paraît même difficile de réaliser, on obtiendra, en prenant pour unités le milligramme et le décimètre,

$$\frac{pr^2}{l} = \frac{25500}{10} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 = 0{,}25.$$

Comme l'expression $\frac{pr^2}{l}$ représente le moment du couple nécessaire pour tordre l'aiguille de 90°, on voit qu'il faudrait pour cela une force de $\frac{1}{4}$ de milligramme à l'extrémité d'un bras de levier d'un décimètre. Pour le même écart, le fil de Coulomb n'exigeait que $\frac{1}{24}$ de milligramme; il avait une sensibilité six fois plus grande. La balance bifilaire est néanmoins un appareil très-ingé-

(1) *Loc. cit.*, p. 423.

nieux dont il a été fait de nombreuses applications dans les expériences d'électricité.

M. Harris [1] s'était servi déjà dans le même but d'une véritable balance avec laquelle il *pesait* les actions électriques, et il a imaginé, pour atteindre ce but, diverses dispositions ingénieuses que nous indiquerons plus tard ; mais ces appareils ne peuvent jamais acquérir la même sensibilité que les fils de torsion pour l'évaluation des petites forces.

Dans ces expériences, d'ailleurs, on ne trouve pas que M. Harris ait pris aucune précaution [2] pour éviter l'influence perturbatrice des conducteurs étrangers, lesquels, d'après ses descriptions et ses figures, paraissent exister en assez grand nombre dans le voisinage des corps étudiés, conducteurs dont les uns étaient isolés et les autres en communication avec le sol. Coulomb s'était en outre astreint à n'employer que des sphères afin que l'attraction fût la même que si la quantité d'électricité de chacune d'elles eût été concentrée en son centre. M. Harris a employé, au contraire, des corps de formes quelconques, de disques, par exemple, munis de cônes sur leurs faces postérieures. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner que les expériences de M. Harris aient été souvent en contradiction avec celles de Coulomb et qu'il soit arrivé à des conclusions telles que les suivantes [3] :

1° Entre deux disques conducteurs également chargés et très-éloignés, la répulsion est en raison inverse du carré de la distance et proportionnelle au produit de leurs charges électriques ;

2° Quand les charges sont inégales, la répulsion est inversement proportionnelle à la distance entre certaines limites ; elle se montre tout à fait irrégulière pour de petites distances et peut même être remplacée par une attraction ;

3° La force électrique n'est pas toujours proportionnelle aux quantités d'électricité, surtout dans le cas des attractions.

Le premier énoncé est conforme à la loi de Coulomb, les conditions de l'expérience étant bien choisies. Les deux propositions suivantes et plusieurs autres semblables émises par M. Harris, malgré leur contradiction apparente avec les mêmes

[1] *Phil. trans.*, part. II, p. 215 (1834).
[2] W. Thomson, *Reprint of papers*, etc., p. 21 et 24.
[3] *Phil. trans.*, part. II, p. 431 (1836).

lois, en sont cependant des conséquences directes si l'on a soin de faire intervenir, dans l'évaluation des forces, la distribution de l'électricité et la forme des corps, circonstances qui ont alors une influence considérable.

32. Les objections de M. Harris n'avaient pas obtenu un grand crédit; cependant M. Marié-Davy [1] a cru utile de répéter les expériences de Coulomb en ayant soin de s'entourer de toutes les précautions nécessaires. Voici, entre autres, le résumé de plusieurs observations sur la répulsion de deux boules égales en moelle de sureau, dans des conditions où, la déperdition d'électricité étant très-faible, la correction relative à cette cause d'erreur pouvait être faite avec beaucoup d'exactitude.

ANGLE D'ÉCART α	RAPPORT DE LA DISTANCE DES CENTRES AU RAYON DES BOULES	TORSION TOTALE $T + \alpha$		EXCÈS DU CALCUL SUR L'OBSERVATION
		OBSERVÉE	CALCULÉE	
68°,5	27,4	12°,3	12°,2	— 0°,1
58 ,5	23,4	17 ,9	17	— 0 ,9
48 ,5	19,4	25 ,2	25 ,2	»
38 ,5	15,4	41 ,9	40 ,4	— 1 ,5
33 ,5	13,4	54 ,9	53 ,8	— 1 ,1
29 ,5	11,8	68 ,3	69 ,7	+ 1 ,4
22 ,3	9	122 ,3	122 ,5	+ 0 ,2
21 ,5	8,5	128 ,5	131 ,9	+ 3 ,4
18 ,5	7,5	168 ,5	178 ,4	+ 9 ,9
16 ,5	6,5	205 ,2	224 ,5	+ 19 ,3
12 ,5	5	336 ,3	391 ,7	+ 55 ,4
10 ,5	4,2	455 ,2	555	+ 101 ,8
7 ,5	3	701	1089	+ 388

Le calcul de la torsion a été effectué en admettant que le produit $(T + \alpha) \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, qui représente le produit de la force par le carré de la distance des centres des deux boules, est constant, et en prenant comme point de départ la valeur relative à l'angle de 48°,5. On voit qu'il y a concordance entre le calcul et l'observation pour toutes les déviations supérieures à 18 degrés,

[1] *Comptes Rendus de l'Académie des sciences*, t. XXXI, p. 863 (1850). — *Mémoire de l'Académie de Montpellier, section des sciences*, t. II, p. 149.

c'est-à-dire pour les cas où la distance des centres est supérieu à huit fois le rayon des sphères; mais les différences ne s plus négligeables pour des écarts moindres, et la déviation servée est toujours trop faible, résultat qu'il était facile de p voir d'après le mode de distribution de l'électricité.

Toutefois M. Marié-Davy, en s'appuyant sur certains calc de M. Roche, considère à tort ses expériences comme entièrem conformes à la théorie. Nous avons extrait des tables de M. Roc les nombres N qui devraient être proportionnels aux valeur du produit $(T + \alpha) \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$ déduites de l'expérience, et l la comparaison dans le tableau suivant :

DISTANCE DES CENTRES	P	N	$\frac{P}{N}$
27,4	47,1	11,4	4,14
23,4	49	11,3	4,34
19,4	46,6	11	4,24
15,4	48,2	10,7	4,50
13,4	47,2	10,5	4,50
11,8	45,8	10,1	4,54
9	46,6	9,7	4,80
8,5	45,5	9,6	4,74
7,5	44,1	9,2	4,80
6,5	42,7	8,9	4,80
5	40,1	8,1	4,95
4,2	38,1	7,8	4,89
3	30,2	6	5

Il n'en résulte pas que l'accord de la théorie avec l'obser tion soit parfait, mais nous verrons que les calculs de M. Ro ne conviennent pas en réalité à cette expérience et donnent nombres qui diminuent plus rapidement à mesure que les sphè sont plus voisines. On peut donc dire, sans qu'il y ait eu des rifications exactes, que les nombres donnés par l'observat marchent dans le sens indiqué par la théorie et que les ine titudes apparentes de la loi des actions électriques, sur lesque M. Harris a tant insisté, sont en réalité des conséquences né saires de la loi élémentaire établie par Coulomb.

CHAPITRE III

DÉPERDITION DE L'ÉLECTRICITÉ

33. **Causes de la déperdition de l'électricité.** — On a vu combien Coulomb s'est préoccupé, dans les expériences précédentes, de l'affaiblissement graduel qu'éprouvent les propriétés électriques; il a cherché ensuite à déterminer les lois de ce phénomène.

La déperdition de l'électricité doit être attribuée à deux causes différentes, l'influence de l'air ambiant et celle des corps mauvais conducteurs par lesquels on soutient les corps électrisés.

Il n'y a pas de support absolument isolant. Tous les corps que l'on emploie pour cet usage conduisent l'électricité d'une manière plus ou moins rapide, soit par leur substance même, soit surtout par la petite couche d'humidité dont ils sont couverts quand ils ont été exposés à l'air ordinaire. Ainsi un cylindre de résine ou de gomme laque finit toujours par s'électriser dans toute sa longueur, quand on met l'une de ses extrémités en contact avec le conducteur d'une machine électrique.

Quant à la perte par l'air, elle peut avoir lieu, soit par le fait d'une conductibilité propre des gaz, analogue à celle des solides et des liquides, soit par cette circonstance que les molécules d'air situées dans le voisinage d'un corps électrisé sont attirées par lui, s'électrisent en le touchant et sont ensuite repoussées, emportant après chaque contact une partie de l'électricité.

34. **Choix d'un support isolant.** — Coulomb a étudié [1] ces deux causes séparément et il a d'abord éliminé l'influence des supports

[1] *Mémoires de l'Académie des sciences*, p. 615 (1785).

en les choisissant de façon qu'ils pussent être considérés comme parfaitement isolants, c'est-à-dire que la perte d'électricité le long de la surface du support fût très-faible par rapport à celle qui s'effectue au contact de l'air ambiant.

Pour reconnaître si un support remplit cette condition, on l'emploie pour soutenir la boule fixe de la balance ; on charge l'appareil à la manière ordinaire et on note le temps que met la boule mobile, en se rapprochant graduellement de la boule fixe par l'effet de la déperdition, pour passer d'une déviation α à une autre α', de 30° à 20° par exemple. Puis on soutient la boule fixe par deux ou plusieurs supports identiques au premier [1], et, répétant la même expérience, on note encore le temps que met la boule mobile à passer par les mêmes angles α et α'. Si ce temps est plus court que dans le premier cas, les supports que l'on a introduits ont causé une perte notable d'électricité ; si les deux durées sont égales, l'influence des nouveaux supports est négligeable et, par suite, le premier peut être considéré comme un *isolant parfait*.

Si le support que l'on étudie ne satisfait pas à cette condition, on peut, dans un grand nombre de cas, le rendre parfaitement isolant en diminuant son diamètre ou en augmentant sa longueur. Cette circonstance montre déjà que la déperdition par les supports est un phénomène assez complexe de conductibilité.

Coulomb a reconnu ainsi que, lorsque la charge électrique du corps soutenu n'est pas considérable, un petit cylindre de cire d'Espagne ou de gomme laque, d'une demi-ligne de diamètre et de 18 à 20 lignes de longueur, suffisait presque toujours pour isoler parfaitement une balle de sureau de 5 ou 6 lignes de diamètre. De même, lorsque l'air est sec, un fil de soie très-fin, passé dans de la cire d'Espagne bouillante et ne formant ensuite qu'un petit cylindre tout au plus d'un quart de ligne de diamètre, remplit le même objet, pourvu que l'on donne à ce fil une longueur de 5 à 6 pouces. Enfin, un fil de verre tiré à la lampe, de 5 ou 6 pouces de longueur, n'isole la balle que dans les jours très-secs et lorsqu'elle est très-faiblement chargée; il en

[1] *Loc. cit.*, p. 624.

est de même d'un cheveu ou d'une soie, à moins qu'on n'ait soin de les enduire de cire d'Espagne, ou, ce qui vaut encore mieux, de gomme laque pure. La gomme laque brune est d'ailleurs préférable à celles dont la couleur est plus claire.

Il résulte de là que la manière dont se comporte un corps mauvais conducteur, employé comme isolant, dépend beaucoup de l'état de l'air et que les moindres altérations de sa surface, telles qu'une couche d'humidité ou une modification chimique, peuvent changer beaucoup les résultats. M. Gaugain en a observé plusieurs cas assez curieux. La conductibilité de la tourmaline, par exemple (1), sensiblement nulle à la température ordinaire, croît rapidement à mesure que la température s'élève et devient très-notable vers 400 ou 500 degrés. C'est là l'effet général d'une élévation de température. Mais en laissant refroidir la tourmaline ainsi chauffée, on constate qu'elle est devenue très-hygrométrique et qu'elle se comporte alors comme un corps bon conducteur. Pour la rendre de nouveau isolante, il suffit de la laver avec de l'eau ordinaire et de la sécher à une température qui ne dépasse pas 150 degrés. La modification qu'a pu subir la tourmaline par cet échauffement est tellement faible, qu'après un grand nombre d'opérations semblables, il n'a pas été possible de constater le moindre changement de poids.

De même la gomme laque (2), lorsqu'elle a été bien préparée et conservée dans un lieu sec, isole d'une manière presque absolue lors même qu'elle est plongée dans un espace saturé d'humidité. Mais si on la laisse séjourner dans cet espace pendant un temps assez long, elle devient tellement conductrice, qu'un électroscope ne peut plus conserver un seul instant les charges qu'on lui communique, quand il est relié avec le sol par un bâton de gomme laque dans cet état. Si on rapporte dans l'air sec le bâton devenu conducteur, il se dessèche en quelques secondes et recouvre son pouvoir isolant; mais il suffit de le porter de nouveau dans un espace humide, pour qu'il reprenne instantanément la conductibilité qu'il n'avait acquise dans la première expérience qu'au

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LVII, p. 8.
(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LIX, p. 29.

bout d'un certain nombre d'heures; cette aptitude à attirer l'humidité dépend indubitablement d'une modification invisible de la surface, car il suffit, pour la faire disparaître, de laver la gomme laque ou seulement de l'essuyer.

Il est probable que la plupart des substances hygrométriques sont susceptibles d'éprouver des modifications analogues.

35. **Détermination de la loi de déperdition par l'air.** — Quoi qu'il en soit, une fois que l'on s'est procuré des supports isolants, on forme l'aiguille mobile de la balance et la tige de la boule fixe avec des supports de cette nature; la déperdition de l'électricité a lieu de la même manière que si l'air seul intervenait et on procède aux expériences de la manière suivante, comme le faisait Coulomb, avec la même balance que celle qui lui avait servi pour l'étude des répulsions électriques. Les deux boules ayant été chargées par une épingle à grosse tête, l'aiguille mobile est repoussée jusqu'à une assez grande distance; par une torsion convenable T du micromètre supérieur, on la ramène à une distance plus petite, et on attend qu'après quelques oscillations l'aiguille se soit arrêtée à une distance déterminée α, de 20° par exemple. On note exactement l'époque t à laquelle se fait cette première observation. On détourne alors d'un certain angle le micromètre supérieur, l'aiguille s'éloigne à une distance plus grande et on attend l'époque t' à laquelle elle se retrouve en équilibre à la même distance α, par suite de la déperdition de l'électricité; la torsion du micromètre n'est plus que T'. On détourne de nouveau le micromètre de la même quantité et on répète une série d'observations semblables.

Entre les deux premières observations, pendant l'intervalle de temps $t' - t$ qui est de quelques minutes, la diminution de torsion a été $T - T'$. Comme cet intervalle est assez petit, on peut admettre que l'effet est proportionnel au temps, et le quotient $\frac{T - T'}{t' - t}$ sera la diminution de torsion pendant une minute. La torsion moyenne du fil dans ces deux expériences était égale à

$$\frac{T + \alpha + T' + \alpha}{2} = \frac{T + T'}{2} + \alpha.$$

Coulomb a toujours observé que, pour une même série d'ex-

périences, le rapport de la diminution de torsion pendant l'unité de temps à la torsion moyenne est constant. Ce rapport est ce qu'on nomme le *coefficient de déperdition de l'électricité.*

Voici, par exemple, l'une des séries d'observations de Coulomb faite le 28 mai.

HEURE DES OBSERVATIONS	DISTANCE DES BALLES	TORSION DU MICROMÈTRE	INTERVALLE DES OBSERVATIONS	TORSION PERDUE ENTRE DEUX OBSERVATIONS	TORSION MOYENNE	RAPPORT DE LA DIMINUTION DE TORSION PENDANT 1′ A LA TORSION MOYENNE
matin						
1re à 6h 32′ 30″	30°	120°				
			5′,75	20°	140°	$\frac{1}{40}$
2e à 6 38 15	»	100				
			6 ,25	»	120	$\frac{1}{30}$
3e à 6 44 30	»	80				
			8 ,25	»	100	$\frac{1}{25}$
4e à 6 53 00	»	60				
			10	»	80	$\frac{1}{20}$
5e à 7 03 00	»	40				
			14	»	60	$\frac{1}{15}$
6e à 7 17 00	»	20				

On voit que les rapports indiqués dans la dernière colonne sont sensiblement égaux, la moyenne étant environ $\frac{1}{41}$.

La valeur de ce rapport dépend d'ailleurs de toutes les circonstances qui modifient l'état de l'atmosphère, comme le montrent les quatre expériences suivantes que Coulomb a choisies entre beaucoup d'autres, parce que l'hygromètre avait donné ces quatre jours des indications très-différentes, la température étant sensiblement la même.

DATE DES EXPÉRIENCES	HEURE DE LA 1re OBSERVATION	DEGRÉ DE L'HYGROMÈTRE	TEMPÉRATURE	HAUTEUR DU BAROMÈTRE	VALEUR MOYENNE DU COEFFICIENT DE DÉPERDITION
28 mai. . . .	6h 32′ du matin	75d	15°,50	28p 3l	$\frac{1}{41}$
29 mai. . . .	5 45 —	69	15 ,50	28 4	$\frac{1}{39}$
22 juin. . . .	11 53 —	87	15 ,75	27 14	$\frac{1}{43}$
2 juillet. . .	7 43 —	80	15 ,75	28 2	$\frac{1}{41}$

36. Ces tableaux donnent lieu à plusieurs remarques.

Comme la distance des boules est constante dans toutes les

expériences d'une même série, la force répulsive des deux balles est proportionnelle à la torsion totale du fil. Donc on peut dire que le rapport de la diminution de force répulsive pendant l'unité de temps (une minute) à la force répulsive moyenne est constant et égal au coefficient de déperdition.

Les différentes observations étaient assez rapprochées pour que de l'une à l'autre la déperdition pût être considérée comme proportionnelle au temps; cette loi sera vraie à plus forte raison pour un temps infiniment petit, et on peut s'en servir pour calculer la torsion au bout d'un temps quelconque, la distance des balles étant toujours supposée constante.

Appelons A la torsion totale à une époque quelconque t, ΔA la diminution de torsion pendant un temps infiniment petit Δt, et m le coefficient de déperdition le jour de l'expérience; la diminution de torsion pendant l'unité de temps sera $\frac{\Delta A}{\Delta t}$, la torsion moyenne $A - \frac{\Delta A}{2}$, et l'on aura

$$\frac{\frac{\Delta A}{\Delta t}}{A - \frac{\Delta A}{2}} = m,$$

ou bien

$$\frac{\frac{-\Delta A}{\Delta t}}{A - \frac{\Delta A}{2}} = -m.$$

La torsion A est une fonction du temps qui varie de $-\Delta A$ pendant le temps Δt; le numérateur $\frac{-\Delta A}{\Delta t}$ a donc pour limite la dérivée de A par rapport au temps, et l'équation devient alors

$$\frac{A'}{A} = -m.$$

On en déduit

$$A = A_0 e^{-mt},$$

e étant la base des logarithmes népériens et A_0 la torsion totale à l'époque où l'on commence à compter le temps.

Si l'on applique cette formule à la première série de Coulomb rapportée plus haut, dans laquelle on a, pour la première et la dernière expériences, $A_0 = 150$, et $A = 50$ avec $m = \frac{1}{41}$, on trouve pour l'intervalle de ces deux expériences 45′, tandis que l'observation a donné 44′,5.

37. On peut aussi déduire de là la loi de déperdition de charge électrique pour chacun des deux corps en présence. Le calcul n'offre pas de difficultés si les balles sont identiques et possèdent la même charge électrique E. La force répulsive F est alors proportionnelle au produit des charges, c'est-à-dire au carré E^2, et l'on peut écrire, en désignant par K une quantité constante,

$$E^2 = KF.$$

Les variations des deux membres de cette équation sont toujours égales, ce qui donne, en appelant ΔE la variation de charge électrique et ΔF la variation correspondante de force répulsive,

$$2E\Delta E = K\Delta F.$$

En divisant cette équation par la première, membre à membre, on obtient

$$2\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta F}{F},$$

ou bien

$$\frac{\frac{\Delta E}{\Delta t}}{E} = \frac{1}{2}\frac{\frac{\Delta F}{\Delta t}}{F},$$

c'est-à-dire que le coefficient de diminution de charge électrique est égal à la moitié du coefficient de déperdition.

Si les deux corps en présence ne sont plus identiques ou s'ils ont des charges différentes E et E′, on a de même

$$EE' = KF.$$

On en déduit, comme plus haut,

$$E\Delta E' + E'\Delta E = K\Delta F.$$

ou bien

$$\frac{\Delta E'}{E'} + \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta F}{F}.$$

Le coefficient de déperdition est donc égal à la somme des coefficients de diminution de charge électrique des deux corps.

Or, Coulomb a démontré par de nombreuses expériences que, lorsque l'air est sec et que les charges électriques ne sont pas considérables, le coefficient de déperdition, tel qu'il est défini par expérience, est indépendant des dimensions des corps électrisés, de leur forme et même de leur nature. Il l'a vérifié en employant un globe d'un pied de diamètre, des cylindres métalliques de toutes tailles, des cercles de métal et de papier, des boules de sureau ou de cuivre. Il a obtenu le même résultat en armant une des balles d'un fil de cuivre de 10 lignes de longueur sur $\frac{1}{4}$ de ligne de diamètre. Toutefois, les corps de différentes figures ne donnent cette égalité de décroissement que lorsque la charge est diminuée à un certain point ; toutes les figures anguleuses perdent d'abord une grande quantité d'électricité pour atteindre peu à peu la vitesse générale de déperdition.

La nature des corps n'influe pas davantage sur la loi de décroissement, même quand ils sont mauvais conducteurs ; ainsi une balle de cire d'Espagne que l'on avait chargée en la touchant avec un corps fortement électrisé, a donné le même coefficient qu'une balle de sureau ou de cuivre.

Si donc, dans l'équation précédente, on substitue un corps quelconque à l'un de ceux qui sont en présence, le second membre ne change pas. Il en résulte que les deux termes du premier membre sont aussi égaux entre eux. Par conséquent, le coefficient de diminution de charge électrique d'un corps est dans tous les cas égal à la moitié du coefficient de déperdition.

38. On peut aussi conclure des expériences de Coulomb, quoiqu'il n'énonce pas ce résultat d'une manière explicite, que le coefficient de déperdition est indépendant de la nature de l'électricité. Biot (1) a vérifié cette conséquence particulière en modifiant un peu la méthode de Coulomb. La boule fixe de la balance avait 3 centimètres de diamètre, et la boule mobile avait été remplacée

(1) *Traité de physique expérimentale et mathématique*, t. II, p. 256.

par un disque de papier doré de même diamètre. Ces deux corps étant électrisés, le disque a été repoussé et s'est maintenu en équilibre à une certaine déviation α, qui s'est trouvée par exemple de 76°,5. Abandonnant ensuite l'appareil à lui-même, on a compté le temps qui s'écoulait jusqu'à ce que le disque eût une autre déviation α' (au bout d'une heure 44 minutes la déviation n'était plus que de 38°,5). Comme le micromètre supérieur est resté au zéro, l'équation d'équilibre de la balance est alors

$$x \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4lc} \varphi,$$

φ désignant la répulsion électrique des deux balles à l'unité de distance. Au bout du temps t, cette répulsion sera devenue φe^{-mt}, ce qui donne pour la deuxième expérience

$$x' \sin \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tang} \frac{\alpha'}{2} = \frac{1}{4lc} \varphi e^{-mt}.$$

On déduit de là

$$e^{-mt} = \frac{x' \sin \frac{\alpha'}{2} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}{x \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}},$$

équation qui donnera la valeur de m.

En opérant le même jour, Biot a trouvé pour m la valeur 0,0203 avec l'électricité négative et 0,0214 avec l'électricité positive. Ainsi la nature de l'électricité n'a pas d'influence sur la déperdition dans le cas au moins de faibles charges, comme celles avec lesquelles on opère dans la balance de torsion. Cette manière d'opérer est plus rapide et plus commode que celle de Coulomb, mais elle ne convient que pour montrer l'égalité de deux déperditions. Les corps électrisés dans l'expérience de Biot avaient de trop grandes dimensions par rapport à leur distance, ces distances avaient trop varié et la détermination du coefficient de déperdition résulte d'un calcul compliqué basé sur la loi des répulsions; Coulomb au contraire s'attachait à opérer sur de petites boules et à maintenir la distance constante, pour être bien certain que la diminution de force répulsive soit due

uniquement à la déperdition d'électricité, sans qu'aucune autre cause d'erreur pût intervenir.

On peut donc admettre l'égalité de déperdition pour les deux électricités, au moins tant qu'il s'agit de charges faibles. Il résulte au contraire des expériences de Faraday que, pour des charges beaucoup plus grandes, l'électricité négative a une tendance à s'échapper plus rapidement.

39. Les grandes variations qu'éprouve la déperdition d'électricité dans l'air ont conduit Coulomb à chercher les causes auxquelles on pouvait les rapporter. L'humidité atmosphérique y joue sans doute un rôle important. En calculant, d'après les tables de De Saussure, le poids de vapeur d'eau qui existait dans l'air pour chacune des quatre séries d'expériences rapportées plus haut, Coulomb a obtenu les nombres suivants :

DATE DES EXPÉRIENCES	DEGRÉ DE L'HYGROMÈTRE	POIDS D'EAU CONTENU DANS UN PIED CUBE D'AIR	COEFFICIENT DE DÉPERDITION	HAUTEUR DU BAROMÈTRE
		grains		
29 mai. . .	69°	6,197	$\frac{1}{60}$	28p 4l
28 mai. .	75	7,295	$\frac{1}{41}$	28 3
2 juillet.. .	80	8.045	$\frac{1}{29}$	28 2
22 juin. . .	87	9,221	$\frac{1}{14}$	27 11

Si l'on cherche, d'après ce tableau, à établir une loi entre la quantité d'eau et le coefficient de déperdition, en écrivant par exemple que les coefficients m et m' dans deux expériences sont proportionnels à une puissance n des poids p et p' de vapeur contenus dans un pied cube d'air,

$$\frac{m}{m'} = \left(\frac{p}{p'}\right)^n,$$

on trouve pour cette puissance, en comparant deux à deux les différentes expériences :

Avec la 1re et la 2e. . . . . $n = 2,76$
— 1re — 3e. . . . . $n = 2,76$
— 1re — 4e. . . . . $n = 3,61$
Moyenne. . . . $= 3,04$

Le coefficient de déperdition serait donc à peu près proportionnel au cube du poids de vapeur d'eau qui existe dans un volume d'air déterminé. Toutefois, on ne doit pas accepter ce résultat comme démontré. Coulomb dit bien avoir constaté que la température n'a pas d'influence appréciable, mais dans les expériences que l'on vient de comparer, la pression atmosphérique a diminué d'une manière sensible à mesure que la quantité de vapeur d'eau allait en augmentant, et il n'est pas probable que ces variations de pression fussent sans effet.

Le coefficient de déperdition varie d'ailleurs, d'après Coulomb, sous des influences qu'il est difficile de préciser; il arrive, par exemple, que l'on trouve des coefficients différents pour certains jours où l'hygromètre, le thermomètre et le baromètre donnent les mêmes indications. « On ne peut, dit-il (1), expliquer ces variétés par une autre cause que la composition de l'air formé de différents éléments plus ou moins idio-électriques, dont la densité, les proportions varient presque continuellement, et qui ont des degrés d'affinité différents avec les vapeurs aqueuses. La seule observation qui m'a paru assez générale, c'est que lorsque le temps change subitement et que l'hygromètre varie sensiblement en quelques heures de l'humidité au sec, la perte d'électricité reste pendant quelque temps plus grande qu'elle ne devrait l'être, d'après le degré de sécheresse indiqué par l'hygromètre; et *vice versa* lorsque l'hygromètre passe subitement du sec à l'humide. »

Il paraît naturel en effet de faire intervenir dans ce phénomène l'état électrique de l'air, mais probablement d'une autre manière que ne paraissait le comprendre Coulomb. Il ajoute encore (2) :

« J'avais imaginé, pour compléter mon travail, de renfermer les corps électrisés dans différentes espèces d'air, de donner à cet air différents degrés d'humidité et de densité, de chercher ensuite dans chaque état des airs la loi de décroissement de l'électricité, etc. »

Il fallait pour cela un ensemble d'appareils et des loisirs qui paraissent avoir manqué à Coulomb; mais on voit que

(1) *Mémoires de l'Académie*, p. 626 (1785).
(2) *Ibid.*, p. 624.

son programme d'expériences était à peu près celui qui a été réalisé plus tard par M. Matteucci.

Coulomb a étudié aussi la déperdition par les supports ou, simplement, a cherché à établir une relation entre la longueur des supports et la charge électrique maximum qu'ils sont capables d'isoler ; mais cette question est très-complexe et nous y reviendrons, afin de la traiter d'une manière plus générale.

40. D'ailleurs cette loi de déperdition n'a pas de portée théorique ; elle n'est autre chose que la loi de Newton pour le refroidissement d'un corps dans une enceinte à température plus basse. Il y a en effet la plus grande analogie entre l'état électrique d'un corps et la température, ou mieux, entre la différence des états électriques d'un corps et du milieu dans lequel il est placé d'une part, et, d'autre part, la différence des températures d'un corps et de son enceinte. La loi de Coulomb et celle de Newton sont donc évidentes au même degré et ne sont l'une et l'autre qu'une première approximation d'une relation probablement beaucoup plus complexe.

Soit, en effet, y une fonction de x, que nous supposerons développable par la série de Maclaurin,

$$y = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots$$

Si cette fonction y représente le refroidissement d'un corps dans une enceinte, et x la différence des températures, ou bien si y est la déperdition d'électricité d'un corps dont la charge est x, le premier terme du second membre est nul. Dans le cas actuel, le second terme $f'(0)$ ne peut pas être nul parce que le phénomène change de signe avec la valeur de x : un corps s'échauffe dans une enceinte plus chaude que lui, et un corps neutre s'électrise dans un milieu électrisé. Comme le terme du premier ordre sera prédominant pour de petites valeurs de x, il restera donc

$$y = xf'(0) = Ax,$$

c'est-à-dire que, comme première approximation, le refroidissement d'un corps est proportionnel à l'excès de température et la déperdition d'électricité proportionnelle à la charge. Il suffit que le phénomène soit lent pour que ce raisonnement soit ap-

plicable ; mais rien n'indique entre quelles limites il pourra être considéré comme suffisamment approché ; c'est à l'expérience à déterminer ces limites. Dans le cas d'une fonction quelconque, il pourrait bien arriver sans doute que la première et la seconde dérivée fussent toutes deux nulles et le développement commencerait au terme du 3e degré, mais la courbe figurative de cette fonction présenterait alors un point d'inflexion à l'origine, et les phénomènes dont il s'agit ne sont pas de nature à donner des points singuliers.

En ce qui concerne le refroidissement, les expériences de Dulong et Petit ont complété la loi de Newton et déterminé une fonction qui, sans avoir le caractère d'une loi absolue, satisfait au phénomène pour de plus grandes différences de température. Il n'a été rien fait de semblable pour la déperdition de l'électricité; on a cherché seulement à déterminer le sens des modifications que diverses circonstances peuvent apporter au phénomène.

41. **Recherches de M. Matteucci.** — M. Matteucci a publié à ce sujet (1) un travail très-étendu dont nous allons extraire les principaux résultats. Il a étudié l'influence de la température, de l'état électrique des corps en présence, de leur distance, de l'humidité de l'air, de la nature des gaz, du mouvement des corps et de la pression.

La balance de M. Matteucci était parfaitement close ; on pouvait donc y produire une atmosphère artificielle de gaz quelconques, soit complétement desséchés par de l'acide phosphorique anhydre, soit maintenus à un certain état hygrométrique, à l'aide de solutions différentes d'acide sulfurique dans l'eau, solutions dont on connaît les tensions de vapeur, d'après les expériences de M. Regnault. Le mode d'observation de la déperdition d'électricité était en général celui de Coulomb.

Mouvement de l'air. — Un premier résultat assez singulier observé par M. Matteucci est qu'un mouvement rapide de l'air dans le voisinage des corps électrisés diminue la perte d'électricité d'une manière sensible, au lieu de l'augmenter comme on serait porté à le présumer. Il déterminait le coefficient de déperdition de deux boules dont l'une était en repos dans l'air

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXVIII, p. 385.

ordinaire, et dont l'autre, dans l'intervalle de deux observations, était vivement agitée dans l'air, ou placée sur le jet de gaz d'un soufflet ordinaire. Dans une expérience semblable, le coefficient de déperdition a été $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$ dans l'air en repos, et $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{13}$ dans l'air agité. Il faudrait ici se prémunir contre une cause d'erreur qui peut être grave, c'est l'électrisation de l'air lancé par un soufflet. Quoi qu'il en soit, l'influence du mouvement sur la déperdition paraît exacte, et on peut s'en assurer d'une manière très-simple. On prend deux boules identiques portées par des manches isolants, et on les électrise en les maintenant en contact. On tient alors l'une d'elles immobile et on agite l'autre vivement dans l'air ; au bout de quelque temps, on les approche séparément d'un électroscope quelconque et l'on constate que la boule qui a été agitée produit une déviation beaucoup plus grande. Il semble résulter de là que la déperdition s'effectue en grande partie par l'électrisation des molécules d'air, et que ce milieu, étant mauvais conducteur, exige un certain temps par s'électriser au contact.

Nature des gaz. — La nature des gaz qui forme l'atmosphère de la balance ne paraît avoir aucune influence sur la perte électrique, que ces gaz soient secs ou qu'ils renferment des quantités quelconques d'humidité. Dans les gaz absolument desséchés, la déperdition d'électricité ne paraît pas suivre la loi de Coulomb. Pour des charges électriques comprises dans certaines limites, la perte d'électricité semble indépendante de la charge, de sorte que le rapport de la vitesse de déperdition à la charge électrique, au lieu d'être constant comme l'avait trouvé Coulomb, irait au contraire en croissant à mesure que la charge diminuerait. Les résultats obtenus par M. Matteucci ne peuvent être exacts d'ailleurs que dans des circonstances tout à fait particulières.

Nature de l'électricité. — Dans l'air et les gaz secs, lorsque les deux boules sont électrisées de la même manière, la perte électrique a été la même pour l'électricité positive et pour la négative, tant que les charges étaient assez faibles ; tandis qu'avec des charges plus grandes, la perte s'est toujours montrée plus rapide pour l'électricité négative, comme l'avait déjà constaté Faraday. Mais si les deux corps que l'on met en présence sont

chargés d'électricités différentes, la perte d'électricité est plus faible que lorsqu'ils sont électrisés de la même manière ; et dans ce cas la diminution de charge de l'un des corps est même plus faible que si ce corps était isolé dans l'air et éloigné de tout conducteur. Ce résultat, qui ne paraît pas avoir été établi par des expériences assez nombreuses, paraît tout à fait imprévu (1).

Température et humidité. — La perte d'électricité augmente assez rapidement avec la température. Ainsi, en opérant dans un gaz parfaitement sec, M. Matteucci a trouvé que, pour une même déperdition, il fallait 278 minutes à la température de 0°, 250 minutes à 13°5 et 167 minutes seulement à 22°. Coulomb, sans avoir fait d'expériences directes sur l'influence de la température, était arrivé à une conclusion différente, et des expériences sur les décharges électriques, dont nous parlerons plus tard, semblent indiquer aussi que la température par elle-même n'a d'autre influence que de limiter la densité absolue du gaz. Les différences constatées par M. Matteucci sont trop grandes pour être uniquement explicables par la dilatation des gaz ; on pourrait attribuer ce résultat à l'humidité qui se serait dégagée des parois de la cloche par suite de l'échauffement, bien que M. Matteucci indique d'une façon positive qu'il a pris toutes les précautions pour opérer sur un gaz parfaitement sec.

L'humidité exerce, en effet, une influence prépondérante. M. Matteucci, en mettant dans la balance des hydrates différents d'acide sulfurique, a constaté que la déperdition augmente avec la tension de la vapeur d'eau dans l'air, mais non suivant la loi du cube de la quantité de vapeur que Coulomb avait énoncée. Toutefois les expériences de M. Matteucci ne sont pas assez complètes ni les résultats d'une même série d'observations assez concordants pour qu'on en puisse tirer une conclusion définitive.

Un autre fait remarquable serait que les vapeurs de différentes substances telles que le camphre, l'assa-fœtida, les huiles essentielles pures et même l'éther, répandues dans un air sec n'exerceraient aucune influence sur la déperdition de l'électricité.

(1) S'il est exact, on pourrait l'attribuer à cette circonstance que le voisinage de deux corps chargés d'électricités différentes diminue la valeur absolue du potentiel sur chacun d'eux.

Distance des corps. — Quand on rapproche les deux boules de la balance, la perte d'électricité augmente rapidement, comme on le voit par les expériences suivantes faites dans un gaz sec et pour lesquelles on a déterminé le temps pendant lequel s'effectuait une même perte de torsion de 10°, lorsque les boules étaient inégalement écartées.

DISTANCE DES BOULES	DURÉE D'UNE PERTE DE 10° DE TORSION	RAPPORT
18°	4'.5	4
25	6	4,1
26	6,5	4
36	10,5	3,4

On voit que la perte d'électricité et un temps donné est à peu près en raison inverse de la distance des deux corps électrisés. La couche d'air intermédiaire jouerait dans ce cas un rôle tout à fait analogue à celui d'un cylindre conducteur parcouru par un flux d'électricité, conformément aux lois d'Ohm.

Pression. — Les résultats les plus intéressants obtenus par M. Matteucci sont ceux qui concernent les changements de pression. Quand un corps fortement électrisé est placé dans une atmosphère raréfiée, il perd d'abord brusquement une grande quantité d'électricité pour subir ensuite une déperdition lente et régulière. La charge électrique *maximum* qu'un corps est capable de garder dans un gaz, est sensiblement proportionnelle à la pression. Cette loi avait été énoncée déjà par M. Harris, et M. Matteucci l'a vérifiée entre des limites très-étendues, la pression ayant varié dans ses expériences de 5^{mm} à 768^{mm}. La boule fixe de la balance *a* (fig. 17), munie de sa tige isolante, était placée dans l'axe d'une cavité cylindrique de métal communiquant avec le sol et ayant 10 centimètres de diamètre. On recouvrait le cylindre et la boule d'une cloche munie d'une tubulure dans laquelle pouvait glisser une tige métallique terminée en bas par une boule *b* et en haut par un crochet *c*. Pour charger la boule *a*, on pouvait opérer de deux manières : raréfier le gaz d'abord,

amener la tige de métal en contact avec la boule, toucher le sommet de cette tige avec le bouton d'une bouteille de Leyde, chargée par un nombre déterminé de tours de la machine, nombre de tours qui restait le même dans toutes les expériences, relever la tige avec un corps isolant, puis laisser rentrer l'air, enlever la boule *a* et la porter dans la balance; ou bien encore, charger la boule à la pression ordinaire, l'isoler, raréfier le gaz et laisser ensuite rentrer l'air dans la cloche.

La charge que conserve la boule *a* est indépendante du mode d'opération ; elle est la même quand on l'électrise avant ou après avoir raréfié l'air.

Le cylindre de métal a pour but de recueillir l'électricité que

Fig. 17.

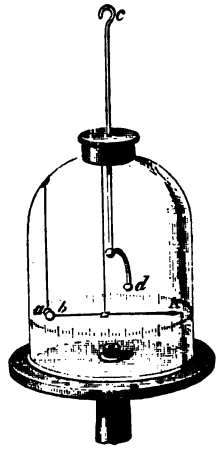


Fig. 18.

laisse échapper la boule et de ne pas la laisser se déposer sur le verre de la cloche, où elle pourrait nuire aux expériences.

Quant à la déperdition régulière, elle est beaucoup plus faible dans les gaz raréfiés. Pour s'en assurer, il suffit de mettre un électroscope chargé sous une cloche dans laquelle on fait le vide ordinaire : la déviation persiste pendant un temps beaucoup plus long que dans l'air. M. Matteucci a formé ainsi un électroscope à l'aide de deux feuilles d'or suspendues dans une cloche à vide par un fil de soie; on pouvait électriser ces feuilles au moyen d'un conducteur courbe passant à travers la tubulure de la cloche, conducteur que l'on éloignait ensuite. La pression étant de

3^{mm} seulement, la distance des feuilles d'or n'a pas varié d'une manière appréciable pendant deux jours. Pour rendre les expériences plus comparables entre elles, il a formé encore une sorte de balance (fig. 18) à l'aide d'une aiguille A*b* suspendue par un brin de soie sans torsion et portant un petit aimant A qui lui donnait une faible force directrice. Cette aiguille était terminée par une boule conductrice *b* qui, dans sa position d'équilibre, était en contact avec une boule *a* suspendue par un fil de soie. On électrisait encore les deux boules à l'aide d'un conducteur courbe *cd*. A la pression de $757^{mm},5$, l'aiguille a mis $4^h5'$ pour revenir de la déviation de 40° jusqu'au contact. La pression étant réduite à 400^{mm}, la distance primitive des boules était d'abord de $38^{m},5$ et, au bout de $14^h15'$, elle était encore de 15^{m}.

42. On peut s'expliquer par là comment l'air raréfié paraît se comporter comme un excellent conducteur d'électricité. C'est que la charge maximum que peut garder dans l'air un corps conducteur est d'autant plus petite que la pression est plus faible; les étincelles électriques peuvent alors acquérir dans les gaz raréfiés une longueur considérable. Toutefois, la question est en réalité plus complexe, car, à partir d'une pression très-faible, le passage de l'électricité dans un gaz devient plus difficile à mesure que la raréfaction augmente, pour cesser d'une manière complète dans le vide absolu. Walsh est le premier physicien qui paraît avoir constaté ce fait important, sur lequel nous aurons l'occasion de revenir avec plus de détails.

43. **Expériences de M. Riess et de M. Warburg.** — Toutefois il reste encore dans cette question bien des points obscurs. La loi de Coulomb est, comme nous l'avons vu, une relation presque évidente (dans des limites qu'il est impossible de préciser d'avance) entre des expériences faites dans des conditions identiques; mais la valeur numérique du coefficient de déperdition peut être modifiée par un changement quelconque apporté à l'une des dispositions expérimentales. Ainsi, M. Riess a observé [1] qu'à l'air libre le coefficient de déperdition croît avec la charge initiale, tandis que l'inverse a lieu dans la cage d'une balance fermée. Si, dans une balance, on détermine ce coefficient à

[1] *Reibungselectricität*, Bd I, p. 138.

l'aide d'une même boule dont on augmente ou diminue la charge, on trouve une valeur plus faible pour les grandes charges que pour les petites. Pour expliquer cet effet, M. Riess admet que l'air de la balance s'électrise relativement plus vite dans les cas des grandes charges, et s'oppose davantage à une déperdition nouvelle. Cependant, cette électrisation disparaît assez rapidement pour ne pas apporter de trouble dans des expériences successives séparées par un intervalle de quelques minutes.

L'interprétation de M. Riess ne paraît pas entièrement satisfaisante et une partie au moins du phénomène qu'il a observé peut être attribuée aux supports eux-mêmes. Si la gomme laque n'est pas absolument isolante, elle peut emprunter au conducteur, surtout si la charge est grande, une quantité notable d'électricité et la lui restituer peu à peu, ce qui tendra à ralentir la diminution de force répulsive ; cette observation s'appliquera surtout aux expériences suivantes de M. Warburg. On sait, en effet, combien le pouvoir isolant d'une tige de gomme laque dépend de l'état de sa surface et, en opérant dans des conditions identiques, M. Riess a obtenu des coefficients qui varient du simple au double, suivant que les supports sont nouvellement préparés ou qu'ils datent seulement de quelques jours.

M. Warburg (1) a repris dernièrement cette question ; il a constaté aussi ces variations de la déperdition avec la charge primitive, et il les attribue surtout à l'électricité dont les supports en gomme laque s'imprègnent peu à peu. Pour éviter cette cause d'erreur, il fait un grand nombre d'expériences successives dans le même gaz, en ayant soin de renouveler de temps en temps les charges du conducteur fixe et de l'aiguille mobile, et il n'accepte comme coefficients de déperdition relatifs au gaz ambiant que les résultats obtenus lorsque les variations deviennent insensibles, les supports pouvant alors être considérés comme *saturés* d'électricité. M. Warburg emploie une suspension bifilaire qui lui paraît moins commode en pratique, mais plus constante dans ses indications à cause des changements permanents de torsion qu'il craint pour les fils de métal. Il a vérifié l'exactitude de la loi de Coulomb, l'égalité de déperdition pour les deux électricités

(1) *Pogg. annalen.*, Bd CXLV, p. 578 (1872).

CHAPITRE IV

DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

44. **L'électricité se distribue à la surface des conducteurs.** — Nous avons vu déjà comment Coulomb a vérifié que l'électricité ne se répand dans aucun corps par une affinité chimique ou par une attraction élective, mais qu'elle se partage entre différents corps mis en contact, d'une manière indépendante de leur nature et uniquement en raison de leur forme et de leurs dimensions. Coulomb a trouvé, en effet, que l'électricité se partage également entre deux boules de même diamètre, dont l'une est en cuivre et l'autre en moelle de sureau, ou bien entre deux disques égaux, l'un en papier et l'autre en fer.

On montrerait de même que la surface des corps en contact influe seule sur le partage de l'électricité (1).

Quand on électrise deux sphères égales en contact, dont l'une est en métal, pleine ou creuse, et dont l'autre est formée d'une substance quelconque, bois, verre, soufre, recouverte d'une feuille de métal, et qu'on les sépare ensuite, ces deux sphères ont exactement la même charge. En les touchant l'une ou l'autre par une boule de métal portée par un manche isolant, on enlèvera la même quantité d'électricité. La matière intérieure à la sphère ne joue donc aucun rôle, et cette propriété serait inexplicable si

(1) Longtemps avant Coulomb, les électriciens ont cherché à reconnaître si l'électricité se communique en raison des masses ou en raison des surfaces ; Le Monnier avait constaté qu'un tube creux s'électrise plus qu'une barre, qu'une lame de plomb étendue étincelle d'avantage que quand elle est roulée sur elle-même. (*Mémoires de l'Académie*, p. 401) (1746).

l'électricité se répandait ailleurs que sur la surface même du corps électrisé.

Pour démontrer directement cette propriété par expérience, Coulomb s'est servi d'une sorte de balance de torsion (1) ou électromètre beaucoup plus sensible. L'aiguille (fig. 19) était formée d'un fil de gomme laque étiré à la flamme à la grosseur d'un fort cheveu. Cette aiguille était suspendue à un fil de cocon de 4 pouces environ, et portait à l'une de ses extrémités un disque de clinquant A de 2 lignes de diamètre, éloigné du fil de suspension d'environ 10 à 12 lignes. Le tout était suspendu dans un cylindre en verre, muni d'une division sur son pourtour, et fermé par un couvercle percé d'une ouverture latérale. La sensibilité de cet électromètre était telle qu'une force de $\frac{1}{60000}$ de grain ($\frac{1}{1000}$ de milligramme) appliquée au disque suffisait pour le chasser à plus de 90 degrés.

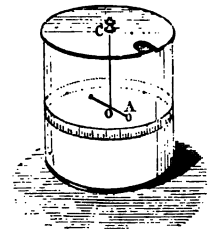


Fig. 19.

Coulomb prit alors un cylindre de bois de 4 pouces de diamètre percé de plusieurs trous de 4 lignes de diamètre et de 4 lignes de profondeur, qu'il électrisa après l'avoir posé sur un support parfaitement isolant. Le disque de l'électromètre étant électrisé de la même manière, il toucha la surface du cylindre avec un petit cercle de papier doré d'une ligne et demie de diamètre, porté par une petite baguette de gomme laque. Portant ensuite ce cercle de papier dans l'électromètre, il vit que l'aiguille était chassée avec force. Il recommença la même expérience en appliquant le cercle de papier dans le fond de l'un des trous du cylindre de bois, et le retirant avec soin sans qu'il touchât les bords du trou ; puis il le présenta à l'aiguille de l'électromètre, et l'action fut inappréciable. Coulomb ajoute à ce sujet : « Comme le plan de papier doré n'a qu'un dix-huitième de ligne d'épaisseur, il devient, quand on le fait toucher à la surface du cylindre, une partie de cette surface, et prend par conséquent une quantité de fluide électrique égale à celle que contient une partie de la surface égale à ce petit cercle. » Cette interprétation de Coulomb est

(1) *Mémoires de l'Académie*, p. 73 (1786).

à noter en passant, parce qu'elle est en contradiction avec ce qu'il dit plus tard du plan d'épreuve.

Les cavités creusées dans le cylindre de bois ne contenaient donc pas d'électricité en quantité appréciable, et toute l'électricité se trouvait sur la surface extérieure.

45. D'ailleurs, la distribution de l'électricité à la surface des corps peut être démontrée par un grand nombre d'expériences plus faciles à réaliser.

1° On électrise, par exemple, comme le faisait Biot [1], une sphère métallique A (fig. 20), isolée par un support ou suspendue à un fil de soie enduit de gomme laque. On applique sur cette sphère deux calottes hémisphériques B et C, qui la recouvrent entièrement et sont tenues séparément par des manches isolants. On enlève ensuite les deux calottes en même temps, et on approche successivement d'un électroscope quelconque, d'un pendule électrique par exemple, d'abord la sphère, puis les calottes qui la recouvraient. On constate que la sphère ne renferme plus aucune trace d'électricité et que les calottes au contraire sont fortement électrisées.

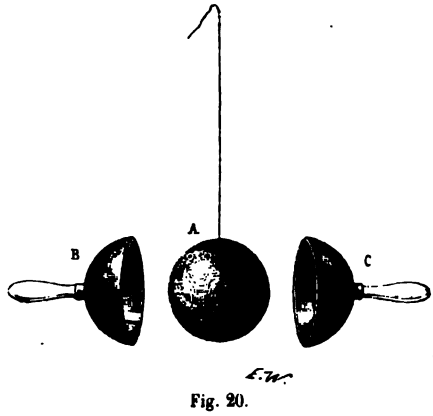


Fig. 20.

Cette expérience est devenue classique, et les appareils qui servent à la répéter sont en général construits d'une manière défectueuse. Ainsi la sphère est portée par un pied en verre muni souvent à la partie supérieure d'une garniture en métal qui ne se trouve pas recouverte par les calottes et conserve de l'électricité. En second lieu, on s'attache à donner aux calottes le même rayon intérieur que celui de la sphère, de sorte qu'elles s'appliquent exactement sur la surface; alors il est à peu près impossible de séparer ces corps d'une manière assez simultanée

[1] *Traité de physique exp. et math.*, t. II, p. 264.

pour que l'une des calottes ne reste pas en contact après l'autre. Il vaut mieux donner à la sphère un rayon notablement plus petit, toucher la sphère avec les calottes quand l'enveloppe qu'elles forment est fermée, puis supprimer le contact et séparer ensuite les deux calottes. L'expérience réussit alors à coup sûr, et c'est à peu près sous cette forme que Cavendish, d'après ses mémoires, l'avait déjà réalisée (1).

2° On électrise une sphère creuse isolée A (fig. 21), dont la surface est percée d'une petite ouverture O. On touche la surface intérieure à l'aide d'une boule ou d'un disque conducteur muni d'un manche isolant, que l'on introduit par l'ouverture; on enlève ce disque en ayant soin de ne pas toucher les bords, et on observe qu'il n'est nullement électrisé; si, au contraire, on l'applique sur la surface extérieure, il s'électrise fortement. On observerait les mêmes résultats avec une surface fermée de forme quelconque. Toutefois, l'expérience est délicate; il arrive souvent que le disque donne des traces d'électricité, même d'électricité contraire à celle du conducteur, et parfois cette électricité ne disparaît pas quand on touche ce disque avec la main. Ces causes d'erreur tiennent à l'influence qu'a subie le support s'il n'est pas parfaitement isolant, et on ne peut les éviter qu'en employant de la gomme laque choisie avec grand soin.

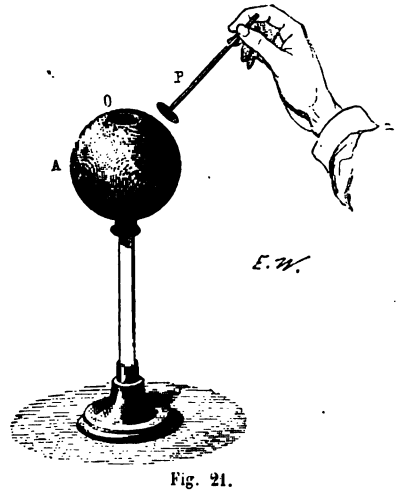


Fig. 21.

3° Sur un treuil en verre on enroule un long ruban d'étain portant deux pendules conducteurs; on l'électrise, les pendules divergent. On déroule le ruban en tournant le cylindre, les pendules se rapprochent; on l'enroule de nouveau et les pendules reprennent leur divergence primitive.

(1) Harris, *Leçons élémentaires d'électricité*, traduct. franç., p. 25.

La même expérience peut être faite plus simplement. On pose une chaîne métallique C (fig. 22) sur le plateau d'un électroscope à feuilles d'or qu'on électrise. En enlevant la chaîne avec un crochet en verre, on voit les feuilles d'or se rapprocher en *a'b'*, et si on laisse retomber la chaîne, elles reprennent à peu près la divergence primitive *ab*.

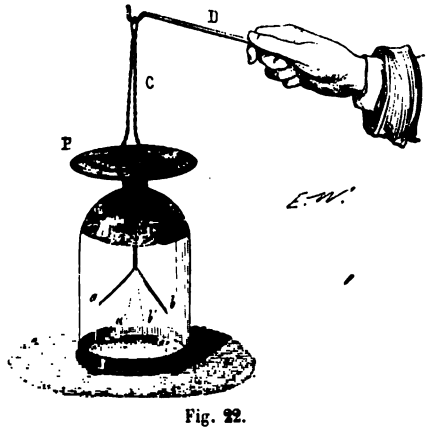


Fig. 22.

Dans ces deux expériences, on voit qu'à charge constante la quantité d'électricité qui se trouve en un point d'un corps est d'autant plus faible que sa surface est plus grande, le volume restant le même.

4° Il n'est même pas nécessaire que la surface du conducteur soit continue pour que le même effet se produise ; Faraday l'a montré par quelques expériences ingénieuses.

Un sac de gaze conique (fig. 23) porté par un cercle de métal

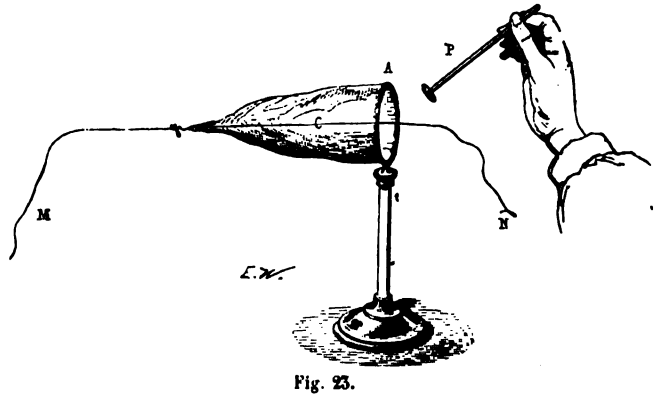


Fig. 23.

isolé est muni de deux fils de soie M et N attachés au sommet des deux côtés. On électrise le sac, et, en opérant comme précédemment, on ne trouve pas d'électricité dans l'intérieur. On retourne le sac avec les fils de soie, les surfaces changent de rôle ; la nou-

velle surface externe est électrisée, tandis que celle qui se trouve maintenant à l'intérieur ne l'est plus.

De même on ne trouve pas d'électricité dans l'intérieur d'une surface cylindrique C (fig. 24) formée par une toile métallique électrisée et posée sur un support isolant, mais on en trouve sur la surface extérieure.

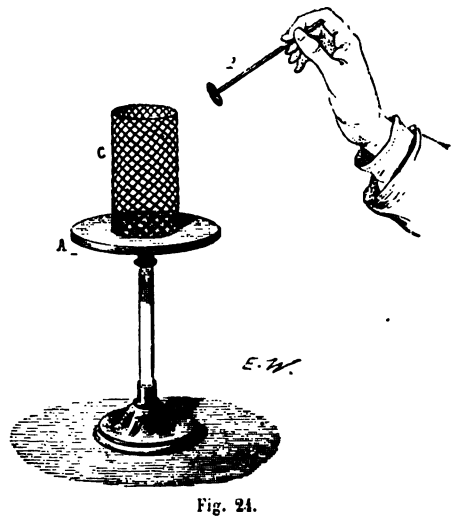


Fig. 24.

46. La propriété des enveloppes conductrices fermées est encore plus générale. Une pareille surface électrisée n'exerce aucune action sur un corps quelconque placé dans l'espace qu'elle renferme, et même elle garantit ce corps contre toute action électrique provenant de l'extérieur.

Si l'on couvre, par exemple, un électroscope très-délicat, comme le faisait Faraday, d'un filet de coton ou de lin à mailles très-lâches, ou d'une de ces cloches en toile métallique qui servent de garde-manger, ou même d'un panier à salade à mailles très-larges, l'électroscope devient absolument insensible à l'action de tout corps extérieur électrisé, que la toile dont il est entouré soit ou non en communication conductrice avec le sol. On peut électriser cette toile d'une manière quelconque, avec les appareils les plus puissants, sans que l'électroscope en soit affecté.

On trouve dans les ouvrages de l'abbé Nollet des expériences que l'auteur ne paraît pas avoir bien interprétées, et qui se rapportent au phénomène dont nous parlons. Certaines figures représentent des espèces de cages métalliques communiquant avec le conducteur d'une machine électrique, et renfermant des objets de toute espèce, plantes, fruits, animaux, etc. L'expérience étant supposée faite dans l'obscurité, on voit des aigrettes brillantes s'échapper de toutes les parties anguleuses extérieures, et aucun des objets placés dans la cage ne paraît lumineux.

Faraday a reproduit cette expérience de diverses manières. Il a constaté qu'un animal tel qu'une souris, placé dans l'intérieur d'une cage conductrice, n'éprouve aucune commotion lorsqu'on met cette cage en communication avec une machine électrique et qu'on en tire de vives étincelles. Faraday construisit ainsi avec des lattes une chambre cubique de 12 pieds de côté et garnit les parois avec des toiles métalliques et du papier. Cette cage étant suspendue par des cables de soie et mise en communication avec une machine électrique, Faraday s'y enferma lui-même avec des électroscopes sensibles et différents appareils d'électricité. Pendant que la cage était assez électrisée pour laisser échapper des aigrettes de tous côtés et qu'on en tirait à l'extérieur de fortes étincelles, Faraday n'éprouvait pas la moindre impression et les appareils dont il était entouré n'indiquaient aucune trace d'électricité (1).

47. Il résulte de toutes ces expériences que l'électricité se porte à la surface extérieure des corps conducteurs, quelque faible d'ailleurs que soit l'épaisseur de la substance qui constitue cette surface, et Coulomb a même essayé de montrer par expérience qu'elle y forme une couche dont l'épaisseur extérieure est insensible; il a touché un globe conducteur électrisé avec un fil de cuivre nu, puis avec un autre fil de cuivre identique au premier, mais recouvert d'une couche isolante de gomme laque, et constaté que tous deux prennent exactement la même charge (2).

On se représente quelquefois le fluide électrique comme occupant l'espace compris entre la surface extérieure du conducteur et une autre surface intérieure infiniment voisine de la première; mais la théorie indique qu'il ne peut y avoir d'électricité en aucun point d'un milieu conducteur, et il semble que l'on doive considérer le fluide électrique comme extérieur aux corps électrisés, sur lesquels il serait maintenu par la pression du milieu ambiant. Quel que soit l'état de cette couche, si sa densité moyenne est égale à ρ en un point où l'épaisseur est ε, la quantité d'électricité qui correspond à un élément de surface $d\sigma$ sera $\rho\varepsilon d\sigma$; on peut la représenter par $\mu d\sigma$, μ désignant la *densité superficielle*.

(1) Faraday. *Experimental Researches*, t. I, p. 365.
(2) *Mém. de l'Académie*, p. 452 (1786).

48. Conséquences théoriques de la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs. — Les expériences directes avec la balance de torsion ont sans doute établi que la loi des actions électriques est l'inverse du carré des distances ; mais, avec quelque soin qu'aient été faites les mesures, l'erreur expérimentale est toujours assez grande, et on ne peut pas en conclure l'exactitude rigoureuse de la loi. La distribution de l'électricité à la surface des conducteurs peut être établie au contraire avec une très-grande rigueur, et elle entraîne aussi comme conséquence la loi du carré des distances. Voici à peu près comment raisonne Coulomb (1).

Considérons d'abord un cône homogène (fig. 25), d'ouverture angulaire infiniment petite ω, formé d'une substance qui agit sur le sommet O du cône en raison inverse d'une puissance n^e de la distance; soit m la masse du point O, ρ la masse de l'unité de volume du cône. Décrivons du point O comme centre et avec des rayons égaux à r et $r + \partial r$ deux surfaces sphériques infiniment voisines, qui découperont dans le cône un élément de volume MN'. L'action de cet élément de volume sur le point O sera, en désignant par φ l'action de l'unité de masse sur une masse égale à l'unité de distance,

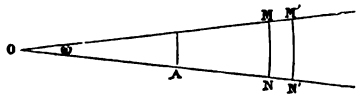


Fig. 25.

$$\varphi \frac{m\rho\omega r^2 \partial r}{r^n} = \varphi m\omega\rho \frac{\partial r}{r^{n-2}};$$

cette expression est la variation ∂f qu'éprouve l'action f exercée sur le point O par une portion du cône limitée à une surface sphérique du rayon r. On a donc à la limite

$$\lim\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \varphi m\omega\rho \frac{1}{r^{n-2}} = f'.$$

L'action de la couche limitée par une sphère de rayon a et une autre de rayon r sera

$$f = \varphi m\rho\omega \frac{1}{3-n}\left[r^{3-n} - a^{3-n}\right].$$

(1) *Mémoires de l'Académie* (1785), p. 587.

Si $n > 3$, le terme a^{3-n} augmente de plus en plus à mesure que a diminue et tend vers l'infini, de sorte que l'action des couches voisines du point O est prédominante.

Si $n = 3$, l'intégrale est alors, le signe l. indiquant un logarithme népérien,

$$f = \varphi m \rho \omega (\text{l}. r - \text{l}. a);$$

le second terme l.a tend encore vers l'infini quand a diminue jusqu'à zéro ; les couches voisines sont encore prédominantes.

Si $n < 3$, on peut écrire $n = 3 - \alpha$, et il vient

$$f = \frac{\varphi m \rho \omega}{\alpha} (r^{\alpha} - a^{\alpha}).$$

Dans ce cas, le terme a^{α} tend toujours vers zéro en même temps que a. L'action des couches éloignées n'est plus négligeable par rapport à celle des couches voisines.

En particulier si $n = 2$, on a simplement

$$f = \varphi m \mu \omega (r - a),$$

c'est-à-dire que l'action exercée sur le sommet du cône par une couche d'une certaine épaisseur, est indépendante de la distance, la diminution des forces élémentaires étant exactement compensée par l'accroissement de section de la couche.

Ces propriétés étant démontrées par un cône d'ouverture infiniment petite, le sont aussi pour un cône d'ouverture angulaire finie.

Il paraît résulter de ce calcul que la cohésion et l'adhésion, qui produisent les phénomènes de capillarité, que l'élasticité, les actions chimiques doivent varier suivant des lois plus rapides que le cube de la distance puisque les portions les plus voisines ont une influence prédominante.

On a supposé dans la démonstration que le cône était homogène ; mais les conséquences sont encore vraies pour le cas où la densité varierait d'une manière continue, pourvu toutefois qu'elle ne devienne pas infinie au point O, ce qui est physiquement impossible.

49. Considérons maintenant un corps conducteur électrisé (1) et supposons que le fluide électrique soit répandu d'une manière continue dans toute son étendue. Découpons sur ce corps une calotte infiniment petite AMB (fig. 26), et prenons aussi de l'autre côté de la section un volume AM'B symétrique de la calotte. La force qui agit sur un élément de fluide situé au milieu O de la section AB peut être considérée comme formée de trois parties, l'action f de la calotte AMB, l'action f' du volume symétrique AM'B laquelle est naturellement dirigée en sens contraire, et l'action F du volume restant. Pour qu'il y ait équilibre, il est nécessaire que la résultante de ces trois forces soit nulle. S'il y a du fluide électrique dans l'intérieur du corps, la densité y varie d'une manière continue ; les deux forces f et f' doivent différer infiniment peu l'une de l'autre, et leur résultante est infiniment petite par rapport à chacune d'elles.

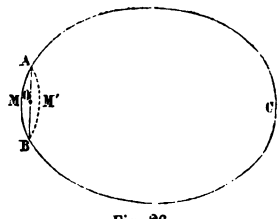


Fig. 26.

Pour que l'équilibre soit possible, il faut donc que la force F soit infiniment petite par rapport à f', c'est-à-dire que les parties les plus voisines aient une action prédominante et que la force varie au moins aussi rapidement que l'inverse du cube de la distance. Si, au contraire, la loi est moins rapide, l'action des parties éloignées n'est pas négligeable et l'équilibre n'est possible que si $f' = 0$, c'est-à-dire s'il n'y a pas d'électricité dans l'intérieur du corps, ce qui est conforme à l'expérience. Ainsi, pour l'électricité et pour tout agent analogue se distribuant régulièrement à la surface, on peut conclure que n est plus petit que 3.

50. Pour démontrer que la loi est précisément celle du carré, on s'appuiera sur cet autre fait expérimental qu'il n'y a pas non plus d'électricité sur la surface intérieure d'un conducteur fermé, et qu'un pareil corps n'exerce aucune action sur ceux qu'il renferme.

Cherchons à évaluer l'action exercée par un milieu homogène PQ (fig. 27), compris entre deux ellipsoïdes semblables et sem-

(1) *Mémoires de l'Académie* (1786), p. 76.

blablement placés, sur un point M situé dans l'intérieur, les forces élémentaires variant en raison inverse du carré de la distance.

Menons du point M comme centre un cône d'une ouverture angulaire infiniment petite par rapport à la distance des deux surfaces qui limitent le milieu. L'action qu'exerce sur le point M le milieu compris dans le volume NA découpé par le cône peut être remplacée par l'action du volume BB_1A_1A compris entre le cône et deux sphères décrites du point M comme centre avec des rayons égaux à MA et MB. Cela revient à ajouter d'un côté et à retrancher de l'autre des éléments de volume infiniment petits par rapport à NA. Or l'action de la portion de cône AB_1 est proportionnelle, comme nous venons de le voir, à sa hauteur AB. Le même cône prolongé de l'autre côté, découpe dans le milieu un volume A'N' dont l'action sur le point M est directement opposée à la première et qui est aussi proportionnelle à A'B'. Comme les portions de corde AB et A'B' comprises entre les deux surfaces sont égales, la résultante des actions des deux volumes AN et A'N' est nulle. La couche tout entière peut aussi être décomposée en éléments dont les actions se détruisent deux à deux, et par suite la résultante générale est nulle.

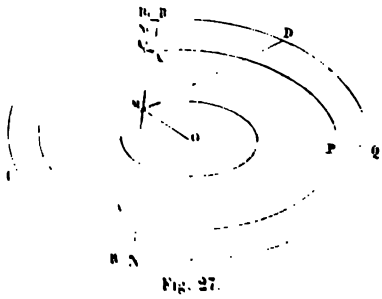


Fig. 27.

Supposons au contraire que la loi soit différente. Menons par le point M le plan CD parallèle au plan diamétral conjugué de la corde MO. Si les forces varient plus rapidement que l'inverse du carré des distances, n étant plus grand que 2, l'action sur le point M de l'élément AN sera plus grande que celle de A'N'; et tous les éléments de la couche situés au-dessus du plan CD auront de même des actions plus grandes que celles des éléments correspondants situés au-dessous de ce plan. En supposant les forces répulsives, la résultante des actions exercées sur le point M ne serait pas nulle et serait dirigée au-dessous du plan CD. Si l'exposant n est au contraire plus petit que 2, la résultante ne

sera pas encore nulle par la même raison, et sera dirigée au-dessus du plan CD. Dans les deux cas, la résultante n'étant pas nulle, il pourrait y avoir de l'électricité à la surface intérieure d'une enveloppe fermée conductrice, et un pareil conducteur devrait agir sur les corps qu'il renferme, ce qui est contraire aux expériences de Faraday.

51. Toutefois les raisonnements qui précèdent peuvent paraître insuffisants parce qu'on y a supposé que l'action de deux éléments varie suivant une puissance de la distance. Laplace a démontré que cette restriction n'est pas nécessaire et, sans supposer aucune forme particulière à la loi des distances, il a prouvé que la distribution du fluide électrique à la surface des conducteurs n'est compatible qu'avec la loi de Coulomb. Les calculs de Laplace exigent des développements mathématiques assez étendus, mais M. Bertrand (1) a publié récemment une démonstration très-simple de cette propriété importante.

« Soit $\varphi(r)$ l'action exercée à la distance r par la masse 1 sur la masse 1, et posons $r^2\varphi(r) = F(r)$; je dis que $F(r)$ est constant. S'il ne l'est pas en effet, il augmente ou diminue. Soient r_1 et r deux limites assez rapprochées pour que $F(r)$ augmente toujours quand r varie de r_1 à r_2. Je prends une couche sphérique homogène infiniment mince de diamètre $AB = r_1 + r_2$ (fig. 28) et un point P sur le diamètre AB, tel que $AP = r_1$, $BP = r_2$. Par ce point P, je conçois un plan RS perpendiculaire à AB, qui coupe la sphère en deux zones RAS et RBS. Je dis que le point P, attiré par ces deux zones supposées homogènes ne peut rester en équilibre. Concevons en effet deux cônes infiniment petits d'ouverture $d\omega$, opposés par le sommet et coupant la couche en K et H ; leurs attractions, dirigées en sens contraire sur P, seront

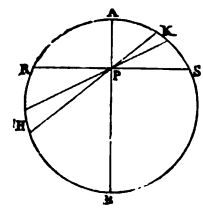


Fig. 28.

$$\frac{d\omega \overline{PK}^2}{\sin V_1}\varphi(PK) \quad \text{et} \quad \frac{d\omega \overline{PH}^2}{\sin V_2}\varphi(PH),$$

V_1 et V_2 étant les angles sous lesquels le cône coupe la sphère.

(1) *Journal de physique*, t. II, p. 418 (1873).

Ces angles sont égaux : si donc on pose $PK = \rho_1$ et $PH = \rho_2$, les deux actions sont entre elles comme $F(\rho_1)$ est à $F(\rho_2)$; mais ρ_1 et ρ_2 sont compris entre r_1 et r_2 ; ρ_2 est plus grand que ρ_1 ; donc $F(\rho_2)$ est plus grand que $F(\rho_1)$. Toutes les actions dirigées au-dessous de RS l'emportent donc une à une sur les actions correspondantes dirigées au-dessus, et par conséquent le point P sera tiré vers le bas. Il n'est donc pas en équilibre et la loi de la nature est la seule qui permette à toute couche sphérique d'être sans action sur les points intérieurs. »

52. **Détermination expérimentale de la distribution de l'électricité.** — L'électricité forme donc une couche très-mince à la surface des corps conducteurs. Cette couche n'est uniforme que dans le cas de la sphère ; dans tous les autres on pourra supposer qu'elle présente aux différents points, soit une densité variable, l'épaisseur étant supposée constante, soit une épaisseur variable avec une densité uniforme, soit encore une épaisseur et une densité variables. Le choix de l'hypothèse est absolument indifférent puisque l'épaisseur doit être extrêmement faible ; on appellera donc *charge* électrique en un point ou *densité électrique* la limite du rapport de la quantité d'électricité qui est répandue sur une petite surface comprenant le point considéré à l'étendue de cette surface. On donne quelquefois à cette quantité le nom de *tension* électrique, mais le mot de tension a été employé en électricité au moins dans trois sens différents. On a appelé ainsi tantôt la densité électrique ou l'action qu'un élément de la surface électrisée exerce sur un point extérieur, laquelle est en effet proportionnelle à la densité ; tantôt la pression que l'électricité répandue sur cet élément de surface exerce sur le milieu ambiant, laquelle, comme on le verra plus loin, est proportionnelle au carré de la densité ; tantôt enfin une fonction d'une nature toute différente qui a été longtemps mal définie et qui joue un rôle important dans la théorie des courants électriques. Il vaut donc mieux éviter l'emploi de ce mot tension à moins qu'on n'ait soin de bien spécifier la signification qu'on lui attribue.

Coulomb a déterminé expérimentalement dans certain un nombre de cas simples la manière dont l'électricité est distribuée à la surface des corps conducteurs en équilibre électrique. C'est d'ailleurs un problème dont la solution est une conséquence directe

au carré des distances. La couche électrique répandue face d'un conducteur doit satisfaire à cette condition que on soit nulle sur un point quelconque de l'intérieur du En effet, si cette action n'était pas nulle, elle produirait rces égales et contraires sur les deux fluides positif et né- ui constituent le fluide neutre au point considéré; il en rait une décomposition nouvelle et un mouvement des électriques, ce qui est contraire à l'hypothèse. Le calcul e en général de très-grandes difficultés; Poisson a traité lème dans un certain nombre de cas et nous verrons que ultats de la théorie sont entièrement conformes à ceux lomb avait obtenus par expérience.

Méthode du plan d'épreuve. — La méthode expérimentale de b repose sur l'emploi du *plan d'épreuve*, c'est-à-dire d'un in conducteur isolé avec lequel on touche les points dont déterminer l'état électrique. Celui dont se servait Cou-) était formé d'un disque *e* de papier doré (fig. 29) de ix lignes de diamètre et de $\frac{1}{18}$ de ligne d'épaisseur, collé ige *edc* de gomme laque fondue à la et étirée en fil gros comme un crin, elle-même à un tube *cb* en verre ou en hé au four et verni à la gomme laque. ficulté pratique à laquelle il faut pren- le est que les fils de gomme laque ne parfaitement imperméables à l'électri- le sont moins les jours humides que s très-secs, et le choix de la gomme n'est pas sans importance : la moins st en général celle qui réussit le mieux. ifie d'ailleurs qu'une tige de gomme st assez isolante en touchant par sa pointe un corps élec- la portant ensuite dans une balance dont la boule mo- té chargée d'électricité de même nom; si l'on aperçoit ulsion sensible, la gomme laque doit être rejetée. Si, n plan d'épreuve incomplétement isolé, on touchait alter- ent deux points très-inégalement chargés, la gomme

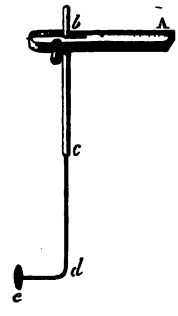


Fig. 29.

oires de l'Académie (1787), p. 425.

Ces angles sont égaux : si donc on ... ience une partie
deux actions sont entre elles comm... ns la première, et
ρ_2 sont compris entre r_1 et r_2 ; ρ
$F(\rho_2)$ est plus grand que $F(\rho_1)$. T... ues de deux points
dessous de RS l'emportent donc u... ère suivante :
pondantes dirigées au-dessus, et ... une balance de torsion
tiré vers le bas. Il n'est donc pa... nducteur ;
ture est la seule qui permette ... n des points A, et on le
sans action sur les points intér... ace de la boule fixe. On

52. **Détermination expérime... cité.** — L'électricité forme do... l'index supérieur pour
face des corps conducteurs. ... ère à une distance déter-
le cas de la sphère ; dans tous ... second point B et, l'intro-
présente aux différents poin... détermine la torsion T' né-
seur étant supposée consta... même distance α.
une densité uniforme, soit ... le plan d'épreuve prend sur
variables. Le choix de l'hy... en ce point une surface
que l'épaisseur doit être ... charge proportionnelle à la
charge électrique en un ... e rapport des répulsions élec-
rapport de la quantité ... y a pas eu de déperdition, ce
tite surface comprenan...
surface. On donne qu... harges du plan d'épreuve ou des
sion électrique, mais ... points touchés.
tricité au moins dan... de vérifier ce principe, que la
tantôt la densité éle... preuve est proportionnelle à la den-
face électrisée exer... par les expériences suivantes :
proportionnelle à l... d'épreuve un point d'une sphère
répandue sur cet él... a manière ordinaire la torsion pro-
laquelle, comme ... le plan ; on met ensuite la sphère
carré de la densit... autre sphère égale à l'état neutre,
différente qui a ... et on touche la première de nouveau
important dans ... torsion totale du fil est moitié moin-
mieux éviter l'...
de bien spécifi... rapport des charges prises par le plan
Coulomb a d... d'un conducteur de forme quelconque
bre de cas si ... charge totale, de même que le rapport des
surface des ... est aussi en être indépendant.
leurs ... conclure de ces expériences. Si l'on admet,

ce qui paraît évident, que l'équilibre électrique sur un conducteur ne peut avoir lieu que d'une seule manière, et que la loi de distribution est indépendante de la charge totale, il est clair que le plan d'épreuve, touchant en un point un corps électrisé, constitue avec lui un conducteur d'une forme particulière; la charge électrique qui se trouve sur le plan est donc proportionnelle à la charge totale du conducteur et par suite à la densité électrique au point touché; c'est là seulement ce que vérifie la première expérience.

En second lieu, la charge du plan d'épreuve ne peut dépendre que de la forme de la surface au point touché, c'est-à-dire des deux rayons de courbure ρ_1 et ρ_2; on peut représenter cette charge m par l'expression

$$m = \mu f(\rho_1, \rho_2),$$

μ étant la densité électrique et f une fonction inconnue des rayons de courbure de la surface, fonction qui dépend aussi des dimensions du plan.

En un autre point, on aura de même

$$m' = \mu' f(\rho'_1, \rho'_2),$$

et, par suite,

$$\frac{m}{m'} = \frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{f(\rho_1, \rho_2)}{f(\rho'_1, \rho'_2)}.$$

Le rapport $\frac{m}{m'}$ est constant en même temps que $\frac{\mu}{\mu'}$, mais ces deux rapports ne sont pas nécessairement égaux.

D'ailleurs, si le plan d'épreuve est très-petit par rapport aux rayons de courbure, l'application de ce plan sur la surface n'en changera pas sensiblement la forme, et il est clair qu'à la limite on doit avoir pour un plan infiniment petit

$$\frac{f(\rho_1, \rho_2)}{f(\rho'_1, \rho'_2)} = 1.$$

La véritable justification de la méthode serait donc de déterminer le rapport des densités électriques en deux points par des plans d'épreuve de grandeurs différentes et de vérifier que

l'on obtient toujours le même résultat, tant que les dimensions du plan sont au-dessous d'une certain limite.

55. Coulomb a cherché à déterminer par l'expérience suivante, le rapport qui existe entre la charge du plan et celle de la surface touchée (1).

Un globe A de 8 pouces de diamètre étant isolé et électrisé, il l'a touché avec une boule B de 1 pouce de diamètre et, en introduisant cette boule dans la balance dont la boule mobile était chargée, l'équilibre a été obtenu avec une torsion totale du fil de 144°. Il a mis ensuite le globe A en contact avec un disque plan de 16 pouces de diamètre et, après avoir séparé ces deux corps, il a touché de nouveau le globe par la boule B, et obtenu dans la balance une torsion de 47°. La diminution de torsion $144 - 47 = 97$ correspond à l'électricité enlevée par le disque, de sorte qu'au moment du contact le rapport des charges du disque et du globe était $\frac{97}{47}$ ou environ $\frac{1}{2}$. Le rapport des surfaces des deux corps étant aussi égal à $\frac{1}{2}$, il en résulte que le partage électrique entre eux s'effectue proportionnellement à la surface totale de chacun d'eux.

« J'ai trouvé, dit Coulomb, par un très-grand nombre d'expériences faites avec des plans plus petits que le précédent, que ce résultat avait toujours lieu; c'est-à-dire, quels que fussent le diamètre du globe et celui du plan, toutes les fois que le plan était mis en contact tangentiellement avec le globe, il partageait l'électricité du globe dans le rapport de la somme de l'étendue des deux surfaces du plan à celle du globe. L'expérience a surtout donné ce résultat d'une manière très-exacte lorsque le plan mis en contact avec le globe était d'un très-petit diamètre, relativement à celui du globe (2). »

« Quelle que soit la figure du corps, l'expérience apprend qu'un petit plan, mis en contact avec ces surfaces, prend toujours, au moment qu'on le retire du contact, une quantité d'électricité double de celle de la portion de surface touchée. L'expérience donne encore ce même rapport double, en faisant toucher un plan très-petit à un grand plan électrisé (3). »

(1) *Mémoires de l'Académie* (1788), p. 674.
(2) *Mémoires de l'Académie* (1788), p. 675.
(3) *Ibid.*, p. 676.

L'expérience dont nous avons rapporté les détails est tellement éloignée des conditions dans lesquelles on se sert du plan d'épreuve qu'elle n'a aucune force démonstrative. Les autres expériences dont parle Coulomb ne peuvent pas être discutées, puisqu'il n'en a pas donné les résultats, mais il est bien difficile d'admettre que le plan d'épreuve prenne une charge électrique proportionnelle à l'ensemble de ses deux surfaces, c'est-à-dire double de celle qui existait sur la surface qu'il touche. La contradiction paraît surtout manifeste quand il s'agit du contact d'un plan sur un autre plan.

56. Néanmoins Coulomb a voulu démontrer encore cette propriété par le raisonnement suivant :

Nous avons vu (28) que l'action d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur A est la même que si toute la masse électrique était concentrée au centre. De plus l'action de la couche DEC (fig. 30) limitée par un cône tangent à la sphère, ayant son sommet en A, est égale à celle de la couche DE'C, puisque le point B est conjugué du point A et que tous les éléments découpés par des cônes ayant le point B pour sommet, exercent sur le point A des actions dont les composantes parallèles à AO sont égales deux à deux. L'action de la calotte DEC est donc la moitié de l'action totale, c'est-à-dire, en employant les mêmes notations que plus haut, μ désignant ici la densité électrique sur la surface,

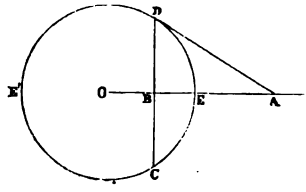


Fig. 30.

$$\varphi m \frac{2\pi R^2 \mu}{(R+d)^2}.$$

Si la distance d est très-petite ou si le rayon de la sphère augmente de plus en plus, cette action se réduit à

$$\varphi m 2\pi\mu.$$

Ce résultat, étant indépendant du rayon de la sphère, sera vrai aussi pour une surface quelconque, pourvu que la distance du point considéré soit très-petite par rapport aux dimensions de la calotte que le cône tangent mené par ce point découpera

sur la surface; il est encore vrai si la densité, au lieu d'être constante, comme nous l'avons supposée, est variable d'un point à l'autre de la surface.

Enfin le théorème est également vrai pour un plan indéfini chargé d'une couche électrique uniforme : l'action de ce plan sur un point quelconque est égale aussi à

$$\varphi m 2\pi\mu,$$

elle est la même que celle d'un élément de surface sur un point infiniment voisin, comme il est facile d'ailleurs de le montrer directement.

57. Considérons maintenant un petit plan *cd* (fig. 31) dont l'une des faces est chargée d'une couche homogène de densité μ' placée à une petite distance *ab* d'une sphère où la densité électrique est μ. Si la distance *ab* est assez petite pour n'offrir aucune résistance au passage de l'électricité ou si elle est formée par un petit fil métallique, il faut, pour que l'équilibre existe, que la résultante des forces qui agissent sur un point de ce fil soit nulle. Or l'action de la sphère est $\varphi m 4\pi\mu$, celle du plan $\varphi m 2\pi\mu'$. On doit donc avoir $\mu' = 2\mu$, ou bien, si on le veut, la densité électrique sera égale à μ sur chacune des deux surfaces du plan *cd*.

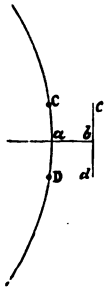


Fig. 31.

Cette dernière partie du raisonnement de Coulomb est inexacte, parce qu'il ne peut pas y avoir d'électricité au point de contact de deux corps; la surface CD voisine du point *a* n'est pas électrisée et l'action de la sphère est réduite à celle de la portion éloignée, c'est-à-dire à $\varphi m 2\pi\mu$; il en résulte alors $\mu' = \mu$. D'après cela, le plan d'épreuve doit prendre une charge égale à celle qui existait sur la portion de surface où il est appliqué.

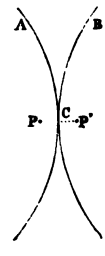


Fig. 32.

Coulomb démontre d'ailleurs de la manière suivante qu'il ne peut y avoir d'électricité au contact de deux corps A et B (fig. 32). S'il y avait de l'électricité sur l'élément de surface qui entoure le point de contact C, son action f en un point infiniment voisin P serait finie, comme on vient de le montrer, et proportionnelle à la densité électrique sur cet

élément ; l'action de cet élément serait la même, mais de sens contraire, sur un point P′ situé de l'autre côté. Comme la résultante doit toujours être nulle, l'action des parties éloignées des conducteurs A et B varierait d'une quantité finie égale à $2f$ quand on passerait du point P au point P′ infiniment voisin, ce qui est évidemment impossible. Il faut donc que la force f soit nulle, c'est-à-dire que la densité électrique soit nulle, dans le voisinage du point de contact C.

58. De ce mode de raisonnement, on peut encore déduire des résultats très-simples :

L'action d'un conducteur quelconque électrisé sur un point P *extérieur infiniment voisin* (fig. 33) *est le double de celle qu'exerce l'élément de surface* AB *voisine du point* P.

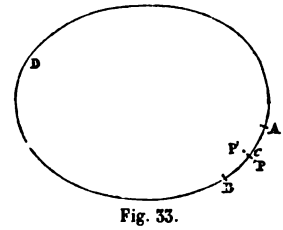


Fig. 33.

En effet, sur un point P′ intérieur au corps, la résultante des actions de toute la couche électrique est nulle ; l'action de la portion ADB de la surface est donc égale et de signe contraire à celle de l'élément ACB. Quand on passe du point P′ au point P infiniment voisin, l'action de ACB change de signe, celle de ADB ne change pas ; l'action totale en P est donc double de celle de l'élément ACB.

Or l'action de ACB sur une masse extérieure m infiniment voisine est égale à $\varphi m 2\pi\mu$, μ étant la densité au point C ; l'action totale est donc $\varphi m 4\pi\mu$, elle est égale à celle d'une couche sphérique uniforme dont la densité serait la même que celle de la surface considérée au point le plus voisin du point attiré.

En particulier, l'électricité répandue sur un élément de surface $d\sigma$ du corps lui-même est $\mu d\sigma$, et l'action que la couche entière exerce sur elle est

$$\varphi 4\pi\mu . \mu d\sigma = \varphi 4\pi\mu^2 d\sigma .$$

Cette force est une pression que le fluide exerce sur le milieu ambiant, pression qui doit être équilibrée par une pression égale et contraire exercée par ce milieu. La pression par unité de surface serait donc

$$\varphi 4\pi\mu^2 ;$$

on voit qu'elle est proportionnelle au carré de la densité, et c'est là ce qu'on désigne quelquefois par le mot de *tension électrique*.

M. Thomson réduit, au contraire, la pression électrique à $\varphi 2\pi\mu^2$. Il fait remarquer qu'une surface plane électrisée ne peut, par raison de symétrie, exercer sur elle-même aucune action normale. De même, l'action d'un élément de surface quelconque sur lui-même ne doit pas intervenir dans la poussée normale et on ne doit tenir compte que des portions éloignées. Ce raisonnement paraît assez plausible, mais il n'est pas douteux en tout cas que la pression ne soit proportionnelle au carré de la densité, puisqu'elle est proportionnelle à la charge totale et à celle de l'élément lui-même.

59. Sans entrer plus avant dans le détail des phénomènes qui ont lieu au contact du plan d'épreuve, on est autorisé à admettre ce principe que le plan d'épreuve enlève une quantité d'électricité proportionnelle à la densité électrique du point sur lequel il a été appliqué ; mais, pour obtenir avec assez d'exactitude le rapport des densités électriques en deux points, il est nécessaire de prendre des précautions particulières.

On opère autant que possible avec des conducteurs de grandes dimensions, afin que le plan d'épreuve lui-même puisse n'être pas trop petit et prenne des charges électriques notables, même quand la densité est assez faible, ce qui convient toujours mieux à cause de la déperdition. On isole ces conducteurs, soit en les suspendant à des fils de soie vernis à la gomme laque, soit, comme le montre la figure 55 empruntée à Coulomb, en les posant sur des pieds en gomme laque.

A chaque contact, le plan d'épreuve enlève au conducteur une certaine quantité d'électricité. Cette perte est en général négligeable, mais on l'élimine complétement en ayant soin de ne pas toucher le plan d'épreuve avant de l'appliquer de nouveau sur le conducteur de sorte que la charge totale ne sera pas changée.

60. **Correction de la déperdition.** — La cause d'erreur la plus grave est la déperdition d'électricité qui a lieu pendant les expériences successives ; Coulomb la corrige par la méthode des alternatives en opérant de la manière suivante. On touche un point A du corps et, en portant le plan d'épreuve dans la balance (dont la boule mobile a été chargée primitivement d'élec-

tricité de même nom), on obtient l'équilibre de la boule à une certaine distance avec une torsion totale A_0. La même expérience répétée pour le point B donne de même la torsion B_0. On reporte ensuite le plan d'épreuve au premier point A et on trouve une nouvelle torsion A_1 plus petite que A_0. Ces différents nombres comparés deux à deux ne donnent pas le rapport des charges aux deux points A et B à cause de la déperdition d'électricité qui a eu lieu d'une expérience à l'autre ; mais, si les expériences sont faites rapidement et si les observations sont sensiblement équidistantes, on peut admettre que la moyenne $\frac{A_0+A_1}{2}$ est la torsion que l'on aurait obtenue pour le point A si l'expérience eût été faite en même temps qu'au point B. La diminution des torsions relatives à un même point est un effet complexe dû à la déperdition subie par le corps lui-même, à celle du plan d'épreuve et à celle de la boule mobile de la balance. Mais, si les supports isolent bien, toutes ces pertes sont proportionnelles au temps, les torsions relatives à un même point varient aussi proportionnellement au temps, et la torsion à une certaine époque est la moyenne de celles qu'on obtiendrait à deux autres époques également éloignées de la première.

De quelque manière que se produise la déperdition, pourvu qu'elle soit lente, on la corrige donc d'une manière complète par la méthode des alternatives. On peut d'ailleurs le vérifier en répétant plusieurs expériences alternatives aux deux points A et B et déterminant ainsi pour ces points les torsions successives A_0, A_1, A_2 ..., B_0, B_1, B_2 ; en comparant trois expériences consécutives quelconques, on constate que l'on obtient une suite de rapports égaux

$$\frac{\frac{A_0+A_1}{2}}{B_0} = \frac{A_1}{\frac{B_0+B_1}{2}} = \frac{\frac{A_1+A_2}{2}}{B_1} = \dots$$

Nous en citerons plusieurs exemples empruntés aux expériences de Coulomb.

61. La nécessité de rendre les observations équidistantes peut paraître une gêne à cause des oscillations de l'aiguille mobile,

mais en réalité, en donnant au fil par l'index supérieur de petites torsions dans un sens et dans l'autre de manière à contrarier les oscillations de l'aiguille, on obtient rapidement l'équilibre à la distance voulue et l'on est à peu près maître de l'époque des observations.

Toutefois, on peut ne pas s'astreindre à cette condition, que Coulomb n'a d'ailleurs jamais négligée. Supposons, par exemple, que les lectures successives A_0, B_0 et A_1 aient été faites aux époques o, t et t'.

L'intervalle de temps t' étant assez petit pour que la perte puisse être considérée comme proportionnelle au temps, on voit que la perte de torsion pendant l'unité de temps pour les expériences relatives au point A est $\frac{A_0 - A_1}{t'}$; pendant le temps t elle serait donc $(A_0 - A_1)\frac{t}{t'}$.

Si donc l'observation relative au point A avait était faite au temps t, en même temps que celle du point B, la torsion totale eût été $A_0 - (A_0 - A_1)\frac{t}{t'}$, de sorte que le rapport des densités électriques des deux points est

$$\frac{A_0 - (A_0 - A_1)\frac{t}{t'}}{B_0}.$$

Coulomb a remplacé quelquefois les plans d'épreuve par de petites boules et il en a obtenu exactement les mêmes résultats. Il est clair que le principe du plan d'épreuve leur est applicable et qu'un corps très-petit de forme quelconque mis en contact avec un conducteur électrisé prend en chaque point une quantité d'électricité proportionnelle à la densité correspondante.

62. **Emploi de deux corps d'épreuve.** — M. Riess a modifié un peu la méthode de Coulomb en employant simultanément soit deux plans d'épreuve identiques, soit deux boules d'épreuve identiques, ce qui permet de ne toucher qu'une fois le conducteur que l'on étudie.

Supposons d'abord que l'on ait vérifié l'identité électrique de deux boules d'épreuve. On les pose en même temps sur deux

points d'un conducteur électrisé, la boule a au point A et la boule b en B. On met la boule b à l'écart, en la suspendant dans l'intérieur d'une cloche en verre de façon qu'elle ne subisse plus aucune influence étrangère, on introduit la boule a dans la balance (la boule mobile étant chargée) et on obtient une torsion A_0; on substitue alors la boule b et on observe une torsion B_0; on détord un peu le fil et on attend que l'aiguille repasse au même point, la torsion n'est plus alors que B_1. Cette dernière expérience permettra de déterminer la déperdition.

Les observations ayant été faites aux époques o, t et t', on voit que la perte de torsion relative à la boule b pendant l'unité de temps est $\left(\frac{B_0 - B_1}{t' - t}\right)$ et que pendant le temps t elle avait été $(B_0 - B_1)\frac{t}{t' - t}$, quantité qu'il faut ajouter à la torsion B_0 pour avoir celle qu'on aurait observée en opérant en même temps que pour la boule a. Le rapport des densités électriques aux deux points A et B est donc

$$\frac{A_0}{B_0 + (B_0 - B_1)\frac{t}{t' - t}}.$$

Si les deux boules sont identiques, et que, renversant leurs rôles, on touche le point A avec la boule b et B avec a, on doit obtenir le même rapport que dans le premier cas.

M. Riess vérifiait l'identité de deux corps d'épreuve, plans ou boules, en les appliquant simultanément sur le bouton d'une bouteille de Leyde. Il a obtenu ainsi, pour deux plans d'épreuve, successivement les rapports [1]

$$\frac{250,8}{246} = 1,02,$$

$$\frac{235}{234,3} = 0,99;$$

[1] *Reibungselectricität*. Bd. I, p. 157.

et, pour deux boules d'épreuve,

$$\frac{93}{92,5} = 1,005,$$

$$\frac{175}{175,3} = 0,998.$$

Ces rapports sont aussi voisins de l'unité qu'on peut l'espérer. M. Riess ajoute que les deux corps d'épreuve, boules ou plans, peuvent être employés dans tous les cas avec autant de facilité et d'exactitude que le plan de Coulomb, mais sans affirmer que sa méthode soit préférable ; il ne semble pas en effet qu'elle doive être meilleure. Cette deuxième boule d'épreuve, dont il faut se préoccuper pendant qu'on expérimente avec la première, ne peut être qu'une gêne; les deux boules ne peuvent jamais être absolument identiques, surtout si l'on songe à la difficulté de trouver des supports également isolants, et l'on applique le coefficient de déperdition qui a été obtenu par les deux dernières expériences à l'intervalle des deux premières, c'est-à-dire en dehors des limites dans lesquelles il a été déterminé. Enfin, il n'est pas commode d'instituer une série d'expériences alternatives comme dans la méthode de Coulomb.

Cette modification de M. Riess présente un avantage réel dans le cas où l'on voudrait déterminer la distribution sur un corps dont l'état électrique serait très-variable, comme le conducteur d'une machine électrique en mouvement, ou sur un conducteur dont la déperdition serait très-rapide ; en touchant en même temps deux points d'un pareil conducteur on obtiendrait un résultat indépendant des variations qu'il peut éprouver. La méthode de Coulomb ne serait plus alors applicable.

63. **Différentes manières de déterminer le rapport des densités électriques de deux points, et le partage de l'électricité entre deux conducteurs.** — On a toujours supposé, jusqu'à présent, que l'aiguille mobile de la balance avait été primitivement chargée d'électricité de même nom que celle du corps que l'on étudie. L'avantage de cette précaution est qu'on peut obtenir des répulsions plus énergiques et que les torsions obtenues sont directement proportionnelles aux charges du plan d'épreuve, c'est-à-dire aux densités électriques des points touchés.

On peut cependant opérer autrement en ramenant chaque fois la boule mobile à l'état neutre et l'électrisant avec le plan d'épreuve lui-même. Si l'on désigne par q la charge du plan d'épreuve, nq la fraction que prend la boule mobile, il restera sur le plan $q(1-n)$, de sorte que la torsion totale sera proportionnelle à $nq(1-n)\,q = q^2(1-n)\,n$, c'est-à-dire proportionnelle au carré de la charge du plan d'épreuve. Par suite, le rapport des densités aux deux points touchés sera égal à la racine carrée du rapport des torsions que l'on aura obtenues en opérant de cette manière. Cette méthode serait la seule applicable dans le cas où les deux points dont on voudrait comparer les densités électriques seraient chargés d'électricités contraires.

Enfin, on pourrait aussi ne pas s'astreindre à ramener toujours la boule mobile à la même distance. Le plan d'épreuve étant introduit dans la balance, on constaterait simplement la distance α à laquelle l'aiguille mobile se maintient en équilibre; la répulsion des deux corps à l'unité de distance serait alors

$$4lc.\,\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

Si la boule mobile a été primitivement chargée, le rapport des densités électriques en deux points donnant lieu aux déviations α et β sera

$$\frac{\alpha \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\beta \sin\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}.$$

Si, au contraire, la boule mobile était chargée chaque fois avec le plan d'épreuve et ramenée ensuite à l'état neutre, il faudrait prendre la racine carrée de cette fraction pour obtenir le rapport des densités.

Cette dernière méthode pourrait être très-rapide, mais elle n'offre pas les mêmes garanties d'exactitude. Si on voulait l'employer dans une série de recherches, il vaudrait mieux encore graduer l'appareil expérimentalement en donnant au plan d'épreuve une série de charges qui seraient toujours dans le rapport de 1 à 2 et formant une table des déviations correspondantes.

64. Lorsque deux conducteurs électrisés sont en contact, on peut déterminer par le plan d'épreuve la distribution de l'électricité sur chacun d'eux et par suite le rapport des quantités totales d'électricités que possèdent les deux corps. Mais le problème est beaucoup plus simple si on ne cherche à déterminer que le rapport des charges, c'est-à-dire le partage de l'électricité entre les deux conducteurs.

Pour cela, l'un des conducteurs A étant seul électrisé, on applique le plan d'épreuve en un point P et, le portant dans la balance dont la boule mobile est chargée de la même électricité, on obtient pour un certain écart une torsion totale T. On touche ensuite le conducteur A par l'autre conducteur B, on enlève ce dernier, et, après avoir posé le plan d'épreuve au même point P du conducteur A, on obtient une torsion nouvelle T'. Le rapport $\frac{T}{T'}$ est égal au rapport des densités au même point P et par suite au rapport des charges électriques M et M' que possédait le corps A avant et après son contact avec B. Ce dernier conducteur a pris dans le contact la charge M — M'. Or, de l'équation

$$\frac{T}{T'} = \frac{M}{M'}$$

on déduit

$$\frac{T'}{T - T'} = \frac{M'}{M - M'}.$$

Tel est le rapport des charges électriques des deux conducteurs A et B lorsqu'ils sont maintenus en contact.

65. Coulomb a souvent employé une méthode un peu différente. Au lieu d'évaluer la densité électrique en un point de l'un des conducteurs A, il introduisait ce conducteur lui-même dans la balance à la place de la boule fixe et déterminait la torsion nécessaire pour maintenir l'aiguille primitivement chargée à une certaine distance. Il enlevait ce conducteur, le mettait en contact un instant avec le conducteur B et, reportant le premier dans la balance, faisait une deuxième observation. Le rapport des deux torsions T et T' ainsi obtenues est encore égal au rapport des charges M et M' du conducteur A avant et après son contact

avec le second, et le rapport des charges électriques des deux conducteurs A et B en contact est

$$\frac{T'}{T - T'}.$$

Pour ce genre d'expériences, Coulomb s'est servi d'une balance plus grande (fig 34) qui lui permettait d'y introduire des boules de métal de quatre pouces de diamètre et d'employer des fils métalliques plus gros, par exemple du fil de cuivre n° 12 du commerce.

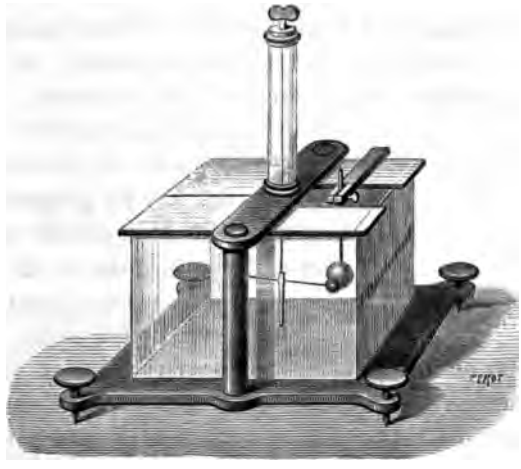


Fig. 34.

La cage de cette balance était carrée et formée par des glaces de 2 pieds de longueur sur 15 à 16 pouces de hauteur, montées dans du bois bien sec; cette cage était couverte par des morceaux de glaces mobiles pour laisser des ouvertures plus ou moins grandes. Le tube de verre qui porte le micromètre et le fil était soutenu par une traverse en bois reliée à la base, et une division correspondant à des angles au centre égaux était tracée sur une des faces de la cage. On voit aisément comment s'effectuaient les expériences.

EXEMPLES DE DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ

Il n'a été fait qu'un petit nombre d'expériences pour
ner la distribution d'électricité sur un corps unique;
présente d'ailleurs des difficultés insurmontables quand
des corps n'est pas extrêmement simple.

66. **Sphère et Ellipsoïde.** — Dans le cas d'une sphère, il
que la distribution doit être uniforme par raison de sy

On sait qu'une couche homogène comprise entre de
soïdes concentriques et homothétiques n'exerce aucu
sur un point intérieur; une couche semblable, de t
épaisseur, appliquée sur la surface d'un ellipsoïde, p
servir à y représenter la distrit
l'électricité. La densité électriq
point P (fig. 35) est proporti
l'épaisseur PN de la couche en
c'est-à-dire à la distance HH'
plans tangents en deux points
gues P et P' des deux couches. S

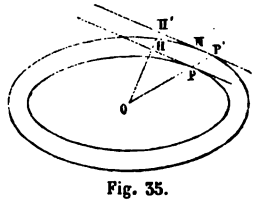


Fig. 35.

le rapport de similitude des deux surfaces, α étant trè
la perpendiculaire OH abaissée du centre sur le plan ta
P, l'épaisseur HH' est égale à $p\alpha$, et la densité μ au poin

$$\mu = \mathrm{K}p\alpha.$$

Si l'on désigne par a, b et c les demi-axes de l'ellipsoï
lume de la couche est

$$\frac{4}{3}\pi abc\,[(1+\alpha)^3 - 1],$$

ou sensiblement $4\pi abc\alpha$. La charge électrique totale est

$$\mathrm{M} = 4\pi abc\alpha\mathrm{K},$$

d'où l'on déduit

$$\mu = \mathrm{M}\frac{p}{4\pi abc}.$$

On a d'ailleurs

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}};$$

il en résulte que la densité sur chacun des sommets est proportionnelle à la longueur de l'axe correspondant.

Si l'on suppose que l'un des axes, c, devienne très-petit, l'ellipsoïde se transforme en un plateau infiniment mince. Puisque

$$\lim. \frac{p}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

on a

$$\mu = \frac{M}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}};$$

les lignes d'égale densité sont des ellipses concentriques et homothétiques. La densité électrique augmente à mesure qu'on s'éloigne du centre sur un rayon. Toutefois, cette formule ne peut convenir à aucun cas réel, puisque la densité serait infinie sur le bord même du plateau, ce qui est évidemment impossible.

Je ne connais d'ailleurs aucune expérience dans laquelle on ait essayé de vérifier la loi de distribution sur un ellipsoïde.

67. **Lame allongée.** — Biot a rapporté (1) quelques expériences qu'il a retrouvées dans les papiers de Coulomb, et que ce physicien n'avait sans doute pas jugé à propos de publier. L'une d'elles est relative à la distribution de l'électricité sur une lame allongée (fig. 36) de 11 pouces de longueur, 1 pouce de largeur et $\frac{1}{2}$ ligne d'épaisseur.

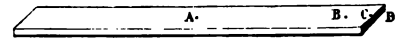


Fig. 36.

En touchant cette lame par un plan d'épreuve, alternativement

(1) *Traité de physique expérimentale et mathématique*, t. II, p. 273.

au milieu A et au point B, situé à un pouce de l'extrémité, il a obtenu les torsions totales suivantes :

En A,	370	. . . . .	350	. . . . .	320
En B,		440	. . . . .	395.	

Ces nombres donnent pour le rapport des densités en B et en A trois valeurs : 1,22, 1,20 et 1,18, dont la moyenne est 1,20.

Il a obtenu de même, en comparant le point A avec le bord C de la lame :

En C,	400	. . . . .	390	. . . . .	300
En A,		195	. . . . .	185,	

d'où l'on déduit, pour le rapport des densités, les nombres 2,02 2,05 et 2,00, dont la moyenne est 2,02.

Coulomb a mis ensuite le plan d'épreuve dans le prolongement de la lame elle-même, en D, au lieu de l'appliquer sur la surface, et il a trouvé :

En A,	305	. . . . .	285		
En D,		1175	. . . . .	1137,	

ce qui donne les rapports 3,98 et 4,05, dont la moyenne est 4,01.

Ce rapport étant sensiblement le double de celui qui a été obtenu pour le point C, Biot en conclut que le plan d'épreuve dans la dernière expérience subissait l'influence des deux surfaces de la lame, et que la quantité d'électricité qu'il prenait était proportionnelle au double de la densité au point touché. Il paraît douteux que Coulomb eût adopté cette manière de voir ; le plan d'épreuve appliqué par sa tranche sur un corps électrisé change tellement la forme de la surface au point touché que la méthode n'est plus applicable en aucune façon. D'autre part, il est certain que si l'on touchait un point quelconque de la lame, C ou B, par un plan d'épreuve posé sur sa tranche, on prendrait une quantité d'électricité beaucoup plus grande, sans qu'il soit nécessaire, pour expliquer ce résultat, de faire intervenir la surface inférieure de la lame ; mais il n'y a aucune relation simple à établir entre les charges que peut enlever le plan d'épreuve dans ces deux positions différentes.

Pour une autre lame de 22 pouces de longueur, il y a eu le même rapport 2 entre la densité de l'extrémité et celle du milieu.

Biot en conclut que pour des lames suffisamment longues par rapport à leur diamètre, la loi de distribution électrique aux extrémités est indépendante de la longueur de la lame. Cette conséquence paraît peu probable.

68. **Disque circulaire.** — Biot [1] rapporte encore, d'après les manuscrits de Coulomb, des mesures faites sur un disque de cuivre circulaire de 10 pouces de diamètre. Le tableau suivant donne le résultat de ces expériences : la première colonne indique la distance du point touché au bord du disque, la seconde le rapport de la densité en ce point à celle du milieu.

DISTANCE AU BORD	DENSITÉ		
	OBSERVÉE	CALCULÉE PAR LA FORMULE DE BIOT	CALCULÉE PAR M. W. THOMSON
5ᵖ (milieu)	1	1	1
4	1,001	1,014	1,020
3	1,005	1,051	1,090
2	1,17	1,17	1,250
1	1,52	1,57	1,667
0,5	2,07	2,041	2,294
0 (bord)	2,90	2,90	∞

Biot a cherché à représenter par la formule suivante

$$y = 1 + A\left[a^{x} - a^{2r-x}\right],$$

qu'il avait imaginée pour la distribution du magnétisme dans les aimants, la relation qui existe entre la densité électrique y en un point et la distance x de ce point au bord d'un disque dont le rayon est r, A et a étant deux constantes à déterminer par l'observation. Les résultats de la troisième colonne du tableau ont été calculés à l'aide de cette formule en y faisant $A = 1,9$ et $a = 0,3$.

[1] *Ibid.*, p. 277.

L'accord du calcul avec les observations est aussi satisfaisant qu'on puisse le désirer, mais il n'est pas étonnant qu'une formule convenablement choisie et qui renferme deux constantes représente six expériences à ce degré d'approximation ; une pareille vérification ne présente d'ailleurs aucun intérêt, parce que la formule n'a pas de signification théorique.

Si l'on suppose dans la formule relative à un ellipsoïde très-aplati (66) que les axes a et b sont égaux, la figure deviendra une sorte de disque circulaire et la densité en un point dont la distance au centre est égale à r sera

$$\mu = \frac{M}{4\pi\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

M. Thomson [1] a déterminé par cette formule les densités aux différents points observés dans l'expérience de Coulomb, et les résultats de ce calcul sont indiqués dans la quatrième colonne du tableau. On voit, par la comparaison des nombres, que la densité sur un disque d'épaisseur constante est toujours plus faible que celle qui aurait lieu au point correspondant d'un ellipsoïde infiniment mince, même à une distance assez grande des bords.

69. **Cylindre terminé par deux calottes hémisphériques.** — Cette expérience a été faite aussi par Coulomb, et il en a publié lui-même les résultats. En opérant avec un cylindre de 30 pouces de longueur et 2 pouces de diamètre, il a obtenu pour densités en différents points :

Au milieu	1
A 2 pouces de l'extrémité	1,25
A 1 pouce —	1,80
A l'extrémité	2,30

L'accroissement de densité à partir du centre est plus rapide que dans les deux cas précédents, mais dans le voisinage des extrémités les variations sont plus faibles.

70. **Cube** — Les expériences que M. Riess a faites à ce sujet nous paraissent tout à fait illusoires. On ne peut pas admettre,

[1] *Reprint of papers*, p. 179.

en effet, qu'en appliquant une boule d'épreuve sur l'arête d'un cube, on enlève une quantité d'électricité proportionnelle à la densité qui existait en ce point; l'introduction de cette boule doit modifier profondément l'état électrique dans le voisinage, et, dans tous les cas, la situation de la boule n'est plus du tout comparable à ce qu'elle est sur une surface continue; à plus forte raison n'est-il pas permis de poser cette boule sur l'angle même du cube.

Quoi qu'il en soit, nous rapporterons, comme l'indique la figure 37, les résultats obtenus par M. Riess.

Le cube avait 37 lignes, c'est-à-dire 3 pouces et 1 ligne de côté; les points b,b' sont situés sur une même circonférence décrite du milieu a d'une des faces avec un rayon égal à 13 lignes; les points c, c' et d, d' sont de même à des distances du point a égales à 15 lignes et 18',5; les nombres inscrits à côté de chaque point représentent la densité électrique en ce point. Les deux nombres marqués au point d' sont relatifs, l'un au cas où la boule est appliquée sur l'une des faces, l'autre à celui où la boule est posée sur l'arête; de même, au point e le nombre le plus grand correspond au cas où la boule est posée sur l'angle même du cube. Il ne semble pas que ces nombres puissent avoir aucune portée théorique ou simplement expérimentale.

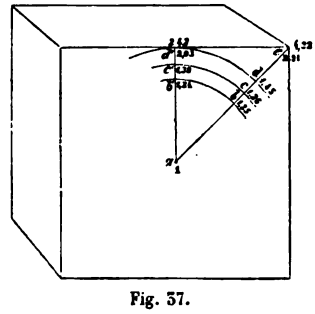


Fig. 37.

71. **Pointes.** — Si l'on considère un ellipsoïde dont un des axes soit très-grand par rapport aux deux autres, on aura une sorte de pointe émoussée assez semblable à celles que l'on emploie dans les expériences; la densité électrique, étant proportionnelle en un sommet de l'ellipsoïde à la longueur de l'axe correspondant, devra être énorme à l'extrémité de cette pointe. Elle est tellement grande, en effet, que l'électricité s'en échappe très-rapidement, et que des corps pareils ne peuvent conserver que des charges excessivement faibles. Pour avoir une idée de la distribution électrique sur une pointe, M. Riess a appliqué sa méthode des boules d'épreuve à des cônes circulaires. Les cônes qu'il a em-

ployés pour cela avaient tous une base de 13',37 de diamètre, et l'angle au sommet était de 90° pour l'un, de 45° et de 22°,5 pour les deux autres. M. Riess a fait d'abord quelques essais avec un plan d'épreuve de 5 lignes $\frac{1}{2}$ de diamètre, puis il a préféré des boules de deux lignes de diamètre. Il n'est pas nécessaire d'insister de nouveau sur l'imperfection de ces expériences; en tout cas, les dimensions des cônes étaient beaucoup trop petites par rapport à celles des corps d'épreuve.

En appliquant le cône de 90° par sa base successivement sur les deux autres, M. Riess a obtenu une distribution d'électricité qui est suffisamment indiquée par les nombres inscrits sur les figures suivantes. Le maximum de densité a lieu au sommet de

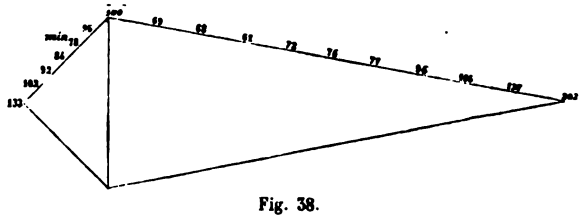


Fig. 38.

l'angle le plus aigu; le sommet du cône de 90° présente aussi une densité maximum par rapport à celles des points voisins, et il en est de même sur la circonférence des bases. Ces résultats étaient faciles à prévoir. Les densités minima se trouvent sur les surfaces latérales des cônes, au tiers environ de la hauteur à partir de la base.

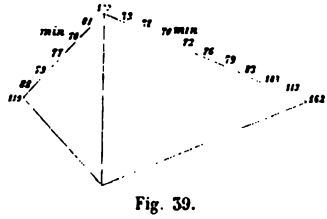


Fig. 39.

M. Riess a posé ensuite ces cônes sur l'une des faces du cube précédemment employé, et comparé, comme l'indiquent les nombres du tableau suivant, les densités électriques du sommet du cône, de l'angle du cube et du milieu de l'une des faces latérales.

ANGLE DU CÔNE	DENSITÉS		
	AU MILIEU D'UNE DES FACES LATÉRALES DU CUBE	SUR UN ANGLE DE LA FACE SUPÉRIEURE DU CUBE	AU SOMMET DU CÔNE
90°	1	4,12	2,83
45	1	4,24	5,33
22,5	1	4,18	8,24

Enfin M. Riess a placé sur le cube des aiguilles à coudre en acier.

La première avait 7 lignes $\frac{1}{2}$ de longueur, $\frac{1}{2}$ ligne de base et un angle de 1°; la densité au sommet a été 3,52, c'est-à-dire plus faible que sur le cône métallique de 45°.

La deuxième avait 6 lignes $\frac{1}{2}$ de longueur, et pour densité au sommet 3,3.

La troisième 4 lignes $\frac{11}{12}$ et pour densité 2,6.

Il a employé ensuite des aiguilles végétales et en a trouvé une seule (pointe d'euphorbe) qui ait eu au sommet une densité plus grande que les pointes métalliques, et qui donne lieu par conséquent à une déperdition plus grande.

Il n'est pas possible de choisir des exemples où la méthode des corps d'épreuve fût plus inapplicable. Tous ces nombres paraissent d'ailleurs trop faibles, et nous verrons qu'ils diffèrent beaucoup de ceux que Coulomb a obtenus par une méthode plus correcte.

72. **Propriétés des pointes.** — Les propriétés curieuses des pointes ont été observées depuis longtemps, et c'est un des phénomènes qui ont le plus attiré l'attention des physiciens.

Quand on pose une pointe sur le conducteur d'une machine électrique munie d'un électroscope, on voit l'électroscope baisser immédiatement; et, si l'on continue à tourner le plateau de la machine, on ne parvient pas à la charger de nouveau, l'électricité que l'on produit s'écoule à mesure par le sommet de la pointe; la perte cesse immédiatement si l'on termine la pointe par une boule de cire ou de moelle de sureau, ce qui est le cas

des expériences de M. Riess où l'on applique une boule d'épreuve sur le sommet d'un cône.

Toutefois l'efficacité d'une pointe ainsi posée sur un conducteur électrisé dépend plutôt de sa longeur et de sa forme générale que de la manière dont l'extrémité est effilée, comme cela résulte des expériences de Coulomb sur les cylindres et les séries de boules; elle dépend aussi de la position qu'occupe la pointe sur le conducteur. Quand ce conducteur a déjà lui-même une forme allongée, comme les cylindres d'une machine électrique, il est clair que la perte d'électricité sera beaucoup plus

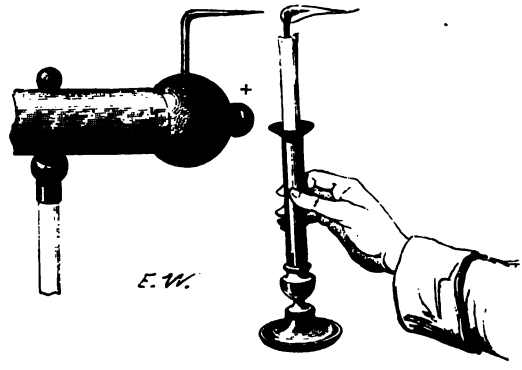


Fig. 40.

grande lorsqu'on posera la pointe à l'extrémité du cylindre, que si on la place sur la région moyenne.

Quand on fait l'expérience dans l'obscurité, on voit que la pointe devient lumineuse; si le corps est chargé d'électricité positive, la pointe paraît se prolonger par une aigrette brillante d'un bleu violacé; on n'observe qu'un point brillant, une sorte d'étoile blanche lorsque l'électricité qui s'échappe est négative.

En plaçant la main devant la pointe, on éprouve la sensation d'un courant d'air auquel on a donné le nom de *vent électrique*; le vent produit par une pointe placée sur une machine peut être assez fort pour éteindre une bougie (fig. 40).

On explique le vent électrique par le mouvement des molécules d'air voisines de la pointe, lesquelles sont électrisées par contact et ensuite repoussées énergiquement. Si cette explication est

exacte, les molécules d'air doivent repousser à leur tour la pointe elle-même, et celle-ci reculera si elle est suffisamment mobile : c'est là l'expérience du tourniquet électrique d'Hamilton (1). Ce petit appareil est formé (fig. 41) de tiges de métal disposées en rayons autour d'une chape, terminées toutes en pointe et recourbées dans le même sens. La chape étant placée sur un pivot conducteur C communiquant avec une machine électrique, l'appareil se met à tourner rapidement en sens contraire de la direction des pointes.

Nous reviendrons plus loin sur la théorie du tourniquet élec-

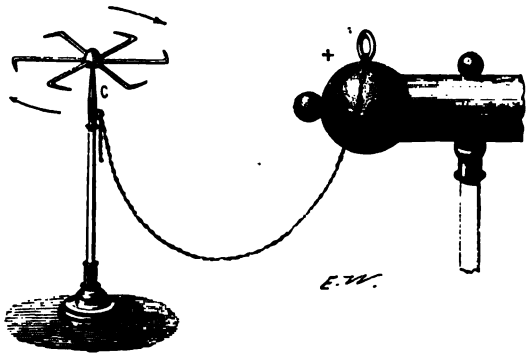


Fig. 41.

trique et sur différentes expériences auxquelles donne lieu cet appareil.

73. **Distribution de l'électricité sur plusieurs corps en contact.** — L'étude du partage de l'électricité entre des conducteurs peut être faite à deux points de vue, suivant que l'on cherche à déterminer seulement les rapports des charges totales d'électricité qu'ils conservent après avoir été séparés, ou que l'on veut déterminer la distribution de l'électricité sur ces conducteurs pendant que le contact est établi.

Voici quelques-unes des expériences de Coulomb.

74. **Deux sphères.** — 1° *Partage de l'électricité.* — Coulomb introduit, par exemple, dans la balance une sphère électrisée C de 6 pouces 3 lignes de circonférence et obtient à la distance de 30°

(1) *Phil. trans. abridged*, vol. XI, p. 504 (1760).

une torsion totale de 145°. Il touche avec cette sphère une autre sphère C′ de 24 pouces de circonférence, et la torsion que produit la première est réduite à 12°.

Le rapport de ces deux torsions est 12,1 ; d'autres observations avaient donné de même les rapports

$$\frac{259}{21} = 12{,}3\,; \quad \frac{255}{21} = 12{,}1\,; \quad \frac{231}{19} = 12{,}1.$$

En désignant par M et M′ les charges des deux sphères après le contact, on a donc pour la première observation, par exemple,

$$\frac{M'}{M} = \frac{145 - 12}{12} = \frac{135}{12} = 11{,}1.$$

Le rapport des surfaces S et S′ des deux sphères est

$$\frac{S'}{S} = 14{,}8.$$

En désignant par D et D′ les densités sur les deux sphères, il vient

$$\frac{M'}{M} = \frac{S'D'}{SD}, \quad \text{d'où} \quad \frac{D}{D'} = \frac{\frac{S'}{S}}{\frac{M'}{M}} = 1{,}35.$$

La perte électrique étant de $\frac{1}{60}$ par minute le jour de cette expérience et l'intervalle des deux observations n'ayant été que de 50″, il n'y a pas lieu de faire de correction relative à la déperdition.

En opérant de même sur d'autres sphères, Coulomb a obtenu les résultats suivants :

DIMENSIONS DES SPHÈRES		$\frac{S'}{S}$	$\frac{M'}{M}$	$\frac{D}{D'}$
C	C′			
0p 3l de circonférence.	11p6l de circonférence.	3,36	3,8	1,09
0p 3l »	24p «	14,8	11,1	1,33
1p environ de diamètre.	8p de diamètre.	62	37,6	1,65

75. Si le rapport des surfaces est très-grand, la petite boule perd presque toute son électricité quand on la met en contact avec la plus grosse, et la torsion que l'on doit obtenir dans la seconde observation est presque insensible ; il faut alors modifier un peu l'expérience, et c'est ce qui a eu lieu pour le dernier cas. La plus grosse sphère C′ fut électrisée en dehors de la balance et parfaitement isolée. On l'a touchée avec la petite boule C et, portant celle-ci dans la balance, on a obtenu, à la distance de 44°, une torsion totale de 244°.

On a ramené cette boule C à l'état neutre, puis on l'a fait toucher 20 fois de suite la grosse sphère, en ramenant la petite à l'état neutre après chaque contact, excepté le dernier; en la reportant alors dans la balance, la torsion ne fut plus que de 126° pour la même déviation 44° de l'aiguille.

Après 20 nouveaux contacts la torsion fut seulement de 66°.

Dans cette expérience la petite boule joue par rapport à la grande le rôle de plan d'épreuve. La diminution de torsion causée par les 20 premiers contacts a été de $244° - 126° = 118°$ dont le $\frac{1}{20}$ est 5°,9 ; la charge moyenne de la grosse boule correspondait à $\frac{244° + 126°}{2} = 185°$. Le rapport de la charge enlevée par chaque contact à la charge moyenne est donc $\frac{5,9}{185} = \frac{1}{31,4}$; c'est le rapport $\frac{M}{M'}$ des charges des deux boules.

Mais il faut remarquer que d'une observation à l'autre, dans le temps nécessaire pour les vingt contacts, l'électricité du gros globe a diminué d'à peu près $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{32}$, ce qui équivaut à peu près à 4 contacts. Tout se passe donc comme s'il y avait eu 24 contacts, et l'on doit prendre pour le rapport des charges

$$\frac{M'}{M} = \frac{185}{\frac{118}{24}} = 37,6.$$

Le calcul peut encore être dirigé d'une autre manière. Soit A la charge primitive de la sphère C′ ; la boule C en prend une fraction $\frac{1}{n}$ à chaque contact. Le premier contact emporte donc

une quantité $\frac{A}{n}$ et il reste sur la première sphère

$$A - \frac{A}{n} = A\frac{n-1}{n}.$$

Le deuxième contact prend $A\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}$ et laisse $A\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$.

Après 20 contacts il reste $A\left(\frac{n-1}{n}\right)^{20}$ sur la sphère C′, et la sphère C a pris $A\left(\frac{n-1}{n}\right)^{19}\frac{1}{n}$.

Comme, à cause de la déperdition, il faut compter 24 contacts entre les deux premières observations et 25 entre les deux suivantes, en tout 49, la torsion finale correspondra à

$$A\left(\frac{n-1}{n}\right)^{49}\cdot\frac{1}{n},$$

ce qui donne, pour le rapport des torsions dans la première observation et dans la dernière,

$$\frac{\frac{A}{n}}{A\left(\frac{n-1}{n}\right)^{49}\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{49} = \frac{244}{66},$$

d'où l'on déduit $n = 38{,}04$.

Le rapport des charges des deux sphères était donc au premier contact,

$$\frac{A\frac{n-1}{n}}{\frac{A}{n}} = n - 1 = 37{,}04$$

nombre peu différent de celui qu'a donné le calcul plus simple.

En prenant une valeur moyenne entre les résultats de beaucoup d'expériences faites ou par la méthode précédente ou par celle du plan d'épreuve, Coulomb a formé la table suivante qui représente la manière dont le fluide électrique se partage entre deux sphères de différents diamètres.

RAPPORT DES RAYONS DES SPHÈRES	RAPPORT DES DENSITÉS MOYENNES	
	OBSERVÉ	CALCULÉ
1	1	1
2	1,08	1,16
4	1,30	1,32
8	1,65	1,44
∞	2	$1{,}65 = \frac{\pi^2}{6}$

La dernière colonne renferme les résultats des calculs effectués par Poisson ; on voit que l'accord est assez satisfaisant.

La ligne horizontale inférieure correspond au cas limite où l'on toucherait une sphère électrisée par une autre sphère infiniment petite ; Coulomb croyait que le rapport des densités tend alors vers 2, et Poisson a trouvé que ce rapport limite est rigoureusement égal à $\frac{\pi^2}{6}$.

76. 2° *Densités en différents points pendant le contact.* — Coulomb a cherché aussi la distribution de l'électricité sur les deux sphères pendant le contact. Il a déterminé d'abord le rapport de la densité électrique Δ sur la petite sphère à l'extrémité B du diamètre commun (fig. 42) à la densité moyenne D de la grande sphère. Il suffisait pour cela de toucher d'abord le point B et de toucher ensuite un point quelconque de l'autre sphère après les avoir séparées l'une de l'autre. Coulomb a donné le tableau suivant comme le résumé de nombreuses expériences, et nous y avons ajouté le résultat des calculs de Poisson. Coulomb avait présumé, d'après la marche des observations, que le rapport des densités devait tendre vers 4 pour le cas où l'une des sphères serait infiniment petite ; Poisson a trouvé que la limite de ce rapport est égale à 4,20721.

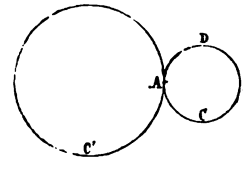


Fig. 42.

RAPPORT DES RAYONS DES SPHÈRES	RAPPORT DES DENSITÉS $\frac{\lambda}{D}$	
	OBSERVÉ	CALCULÉ
1	1,27	1,52
2	1,55	1,83
4	2,55	2,48
8	3,18	3,09
∞	4	4,21

77. Si les deux sphères qui sont en contact sont égales, il n'y a pas d'électricité sensible au voisinage du point de contact A (fig. 43) et jusqu'à une distance angulaire d'environ 20°. A partir de là, la densité augmente d'une manière assez rapide jusqu'au point D qui est à 90° du point de contact, puis d'une manière plus lente entre ce point et l'extrémité B du diamètre commun. Le tableau suivant donne la densité sur différents points F, E,.. en prenant pour unité la densité au point D.

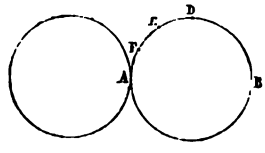


Fig. 43.

DISTANCE ANGULAIRE DU POINT CONSIDÉRÉ AU POINT DE CONTACT	DENSITÉ	
	OBSERVÉE	CALCULÉE
30°	0,21	0,171
60	0,80	0,746
90	1	1
180	1,05	1,140

Si les sphères sont inégales, la distribution sur la plus grosse tend à devenir uniforme, et l'électricité ne tarde pas à ne plus être sensible sur la petite jusqu'à une distance de 30°. Le tableau suivant montre comment varie la distribution sur la petite sphère à mesure que le rayon diminue.

RAPPORT DES RAYONS	DISTANCE ANGULAIRE DU POINT CONSIDÉRÉ AU POINT DE CONTACT	DENSITÉ	
		OBSERVÉE	CALCULÉE
2	60° 90 180	0,59 1 1,33	0,556 1 1,35
4	90° 180	1 1,43	1 1,673

La concordance des résultats du calcul et de l'observation est satisfaisante; mais on peut remarquer qu'en général les nombres obtenus par expérience se rapprochent plus de la densité moyenne que ceux qu'indiquerait le calcul, et c'est là en effet le sens dans lequel les erreurs expérimentales doivent se produire de préférence.

78. **Partage électrique entre plusieurs sphères.** — Coulomb a étudié de même le partage de l'électricité entre plusieurs sphères en contact; ces sphères étaient portées sur des trépieds en gomme laque; on les séparait après les avoir électrisées et on déterminait le rapport de leurs charges totales.

Quand une sphère petite est placée entre deux autres plus grandes elle ne prend qu'une quantité très-faible d'électricité.

Pour trois sphères égales en contact, A_1 A_2 A_3, disposées dans l'ordre des indices, on a pour le rapport des charges

$$\frac{A_1}{A_2} = 1{,}34.$$

Avec 6 sphères égales on a de même

$$\frac{A_1}{A_2} = 1{,}48 \qquad \frac{A_1}{A_3} = 1{,}56.$$

Pour 12 sphères égales

$$\frac{A_1}{A_2} = 1{,}50 \qquad \frac{A_1}{A_6} = 1{,}70.$$

Pour 24 sphères

$$\frac{A_1}{A_2} = 1,56 \qquad \frac{A_1}{A_{12}} = 1,75.$$

Pour deux petites sphères A_1 et A_2 de 2 pouces de diamètre, en contact avec une sphère B de 8 pouces, et disposées comme l'indique la figure 44, on trouve

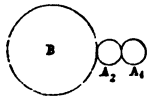


Fig. 44.

$$\frac{A_1}{A_2} = 2,54.$$

Avec 4 petites sphères en contact avec la plus grosse et disposées de même,

$$\frac{A_1}{A_4} = 3,40.$$

Dans ce cas, le rapport de la charge de la boule A_1 avec celle qu'elle prendrait si elle était seule est 1,60.

Pour 24 petites sphères en contact avec une autre de diamètre quadruple, les rapports des charges des différentes sphères sont :

$$\frac{A_1}{A_2} = 1,49$$
$$\frac{A_1}{A_{12}} = 1,70$$
$$\frac{A_1}{A_{25}} = 2,10$$
$$\frac{A_1}{A_{24}} = 3,72.$$

Le rapport de la densité moyenne de la première sphère A_1 à celle de la grande B est 2,16 et le rapport de la densité moyenne des petites sphères A à celle de la grande B est 1,27.

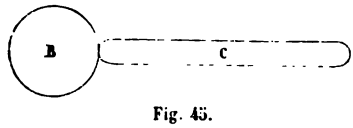


Fig. 45.

79. **Sphère et cylindre.** — Une sphère B de 8 pouces de diamètre (fig. 45), a été mise en contact avec un cylindre C de 30 pouces de longueur et 2 pouces de diamètre, terminé par deux calottes hémisphériques.

Le rapport des surfaces de la sphère et du cylindre était

$$\frac{S}{S'} = 1{,}07$$

et le rapport des densités moyennes sur le cylindre et sur la sphère

$$\frac{D'}{D} = 1{,}29.$$

Ce rapport a été obtenu en touchant la sphère avec le plan d'épreuve avant et après qu'elle avait était mise en contact avec le cylindre.

En remplaçant ce cylindre par un autre de même diamètre et de 15 pouces de longueur seulement, le rapport $\frac{D'}{D}$ n'a pas changé. Avec un cylindre de 5 à 6 lignes de longueur et 2 lignes de diamètre, on a trouvé $\frac{D'}{D} = 2$. Enfin, pour un cylindre de 6 pouces de longueur et 2 lignes de diamètre, $\frac{D'}{D} = 8$.

Coulomb a mis en contact avec la même sphère des cylindres de même longueur (30 pouces) et de diamètres différents, et il a trouvé que le rapport des densités moyennes varie un peu moins vite que la puissance $\frac{4}{5}$ du rapport inverse des diamètres, comme l'indique le tableau suivant.

Rayon de la sphère R = 4^p
Longueur de cylindre = 30^p

RAYON DU CYLINDRE r.	RAPPORT DES CHARGES	$\frac{D'}{D}$	$\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{4}{5}}$	$\frac{D'}{D} : \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{4}{5}}$	$\frac{D'}{D} : \frac{R}{r}$
4^p	2,25	0,60	1,	0,60	0,60
2^p	1,59	0,85	1,741	0,49	0,42
1	1,22	1,30	3,03	0,43	0,32
6^l	0,96	2,	5,27	0,38	0,25
1^l	2,12	9,	22,12	0,41	0,19

Pour le dernier cas, comme l'expérience a montré (69) que la

densité à l'extrémité du cylindre est 2,30 fois plus grande que la densité moyenne, il en résulte que le rapport qui existe entre la densité à l'extrémité du cylindre et la densité moyenne de la sphère est égal à

$$9 \times 2{,}3 = 20{,}7.$$

Il est utile de comparer ces résultats avec ceux qu'a obtenus M. Riess en étudiant, par la méthode directe des boules d'épreuve, la distribution de l'électricité aux différents points d'un conducteur formé par un cône posé sur un cube.

Dans les expériences de M. Riess, la densité à l'extrémité de la pointe la plus aiguë, celle du cône 22°,5, n'a été égale qu'à 8,24 fois la densité du milieu de la face du cube, c'est-à-dire 8 fois au plus la densité moyenne de ce cube; les aiguilles du métal et les pointes végétales ont donné des nombres encore plus faibles. Le cylindre d'une ligne de rayon n'est pas encore comparable à une pointe aiguë, et cependant Coulomb a trouvé pour l'extrémité de ce cylindre une densité beaucoup plus grande, par une méthode qui n'est pas absolument rigoureuse, mais qui doit donner des nombres très-voisins de la vérité.

80. Si l'on met différentes sphères en contact avec un même cylindre, on peut présumer d'après la marche des nombres que renferme le tableau précédent que, pour une certaine longueur du cylindre, sa densité moyenne sera sensiblement proportionnelle au diamètre de la sphère et qu'on aura à peu près

$$\frac{D'}{D} = m \frac{R}{r^{\frac{1}{5}}}, \text{ ou environ } \frac{D'}{D} = m \frac{R}{r}.$$

On déterminera la valeur du coefficient m en s'appuyant sur ce résultat que, lorsque le rayon de la sphère est de 4 pouces et celui du cylindre de 1 ligne, le rapport des densités est 9; le rapport des rayons étant alors 48, on en déduit $m = \frac{9}{48}$, d'où

$$\frac{D'}{D} = \frac{9}{48} \cdot \frac{R}{r}.$$

On peut appliquer, comme l'a fait Coulomb (1), ce calcul approché au cas du cerf-volant de Franklin. Si l'on admet qu'un cerf-volant, retenu par une corde mince de 2 lignes de diamètre, soit mis en communication avec un nuage considérable que l'on assimilera à une sphère de 1000 pieds de rayon, on aura alors

$$\frac{R}{r} = 12000 \text{ et, par suite, } \frac{D'}{D} = 27000.$$

Comme la densité ε à l'extrémité de la corde est égale à 2,30 fois la densité moyenne, il en résulte que l'on aura

$$\frac{D}{\varepsilon} = 2{,}30 \text{ et } \frac{D'}{D} = 62000.$$

La densité électrique à l'extrémité de la corde cerf-volant étant 62000 fois plus grande que celle du nuage, on peut s'expliquer par là la puissance des étincelles que l'on tire de l'extrémité inférieure de la corde dans ces conditions même avec un nuage faiblement électrisé.

Enfin, la comparaison des deux séries d'expériences qui précèdent sur les sphères et les cylindres conduit à ce résultat important que, quelle que soit la longueur d'un cylindre ou d'une ligne formée par de petits globes de même diamètre que le cylindre, la densité moyenne de l'électricité est à peu près la même.

(1) *Mémoires de l'Académie* (1788), p. 654.

CHAPITRE V

INFLUENCE ÉLECTRIQUE

81. **Phénomène général de l'influence.** — Jusqu'à présent, nous avons électrisé les corps, soit en les frottant directement, soit en les mettant en contact avec un corps déjà électrisé; mais ce contact même n'est pas nécessaire. Il suffit qu'un corps, surtout s'il est conducteur, soit placé dans le voisinage d'un corps électrisé, dans ce qu'on appelait autrefois une atmosphère électrique, pour qu'il soit lui-même électrisé; c'est là ce qui constitue l'*influence électrique*. Les phénomènes d'influence ont été observés par plusieurs physiciens, Otho de Guericke, Hauksbée, Gray, etc., sans qu'on y donnât une attention suffisante, et c'est Canton qui paraît les avoir signalés pour la première fois (1).

Canton suspendit à un conducteur communiquant avec le sol une paire de boules de liége avec des fils de lin et en approcha un tube de verre électrisé à une assez grande distance : il vit les boules se repousser d'autant plus que le tube était plus voisin, et retomber exactement dans la verticale quand le tube était enlevé. Avec des pendules portés par des fils de soie, la répulsion ne s'observa que pour une distance beaucoup plus petite du tube électrisé, et elle persista quelque temps après que le tube fut éloigné. Les pendules étaient donc électrisés à distance par l'influence du tube de verre.

L'influence s'exerce aussi sur un corps déjà électrisé. Canton électrisa un tube de fer-blanc isolé et muni d'une paire de pendules conducteurs. En approchant peu à peu de ce corps un tube

(1) *Phil. trans. abridged.*; vol. X, p. 421 (1755).

e verre électrisé, il vit les pendules, qui étaient écartés l'un de autre, se rapprocher jusqu'au contact et diverger de nouveau. uand on enlevait lèntement le tube, les boules se rapprochaient ncore et divergeaient ensuite pour reprendre leur distance pri- itive.

Canton remarqua encore que si l'on approche un corps élec- risé de la partie moyenne d'un cylindre conducteur isolé et uni de pendules à ses extrémités, et qu'au bout de quelques nstants on éloigne le corps électrisé, le cylindre reste chargé l'électricité *contraire* à celle du corps influent.

Toutefois Canton ne semble pas avoir distingué le vrai carac- tère des phénomènes d'influence. Wilke [1] observa qu'un corps de petites dimensions isolé ne s'électrise pas d'une manière sen- sible par influence, et que, lorsqu'il communique avec le sol, il se charge d'électricité *contraire* à celle du corps influent. Enfin, Œpinus [2] démontra qu'un conducteur cylindrique isolé, dont l'une des extrémités est voisine d'un corps électrisé, prend dans sa partie la plus proche de l'électricité *contraire* à celle du corps influent, et dans sa partie la plus éloignée de l'électricité de *même espèce* : c'est là le résultat complet de l'influence élec- trique.

82. **Démonstration expérimentale.** — On démontre ce phéno- mène important par une expérience qui ressemble beaucoup à celle d'Œpinus, en faisant agir une sphère conduc- trice électrisée A (fig. 46), sur un cylindre horizon- tal BC terminé par des ca- lottes sphériques, d'un dia- mètre beaucoup plus petit que celui de la sphère et d'une grande longueur. Ce cylindre est porté sur des pieds isolants ou mieux suspendu à des fils de soie vernis à la gomme laque; le long du cylindre on attache à la partie inférieure un certain nombre de paires de pendules à fils de lin et à boules de moelle de sureau.

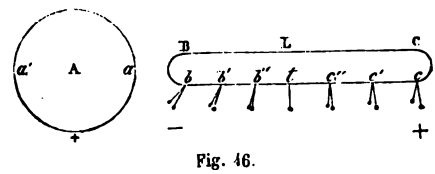


Fig. 46.

Quand on approche la sphère A, chargée par exemple d'élec-

[1] Wilke, p. 73.
[2] *Œpini tentamen*, p. 129 (1758).

tricité positive, de l'une des extrémités B du cylindre, on voit qu'aussitôt presque tous les pendules divergent : il en résulte déjà que le cylindre BC est électrisé dans toute son étendue.

Toutefois les écarts des boules sont très-inégaux. Les premières *b* divergent beaucoup, et la divergence diminue peu à peu pour les suivantes, jusqu'à ce qu'on en rencontre une paire *t* dont les fils sont restés verticaux ; à partir de ce point on observe encore des divergences croissantes, jusqu'à la dernière paire attachée en *c*, laquelle cependant diverge moins que la première. On conclut de là que la densité de la couche électrique est maximum aux extrémités du cylindre, qu'elle diminue peu à peu à mesure qu'on s'éloigne des extrémités et qu'en *t*, vers le milieu du cylindre, mais un peu plus près du corps influent, il y a une ligne L des points non électrisés, qu'on appelle la *ligne neutre*.

On remarque de plus que les pendules *b*, *b'*, *b''*, attachés à la première partie du cylindre s'inclinent tous vers le corps influent, surtout ceux de la première paire : ces pendules, et par suite la portion antérieure du cylindre, sont donc chargés d'électricité *contraire* à celle du corps influent.

Pour vérifier que l'autre portion LC du cylindre a de l'électricité de même espèce que le corps influent A, on pourrait remarquer que les paires de pendules *c*, *c'*, *c''*, s'inclinent du côté opposé; mais cette déviation est en général à peine marquée, surtout si le cylindre est un peu long, et on ne pourrait pas en tirer une conclusion bien rigoureuse à cause de l'électricité qui se trouve en BL. On touche alors le corps influent A avec une boule conductrice isolée et approchant cette boule des pendules *c*, *c'*, *c''*, on voit qu'ils sont tous repoussés.

Enfin, les deux quantités d'électricité positive et d'électricité négative produites par influence sur le cylindre sont équivalentes, car si l'on enlève le corps influent A ou si on le touche avec la main, tous les pendules retombent dans la verticale, et on ne trouve plus sur le cylindre aucune trace d'électricité.

Cette dernière expérience ne réussit pas toujours, surtout si l'influence a duré un certain temps, à cause de la déperdition de l'électricité. Le plus souvent, le cylindre conserve un petit excès d'électricité contraire à celle du corps influent, parce que les supports imparfaitement isolants et le contact de l'air jouent le

rôle d'une communication incomplète avec le sol ; d'autres fois il reste sur le cylindre de l'électricité de même nom que celle du corps influent, parce que sa densité moyenne est plus faible et sa déperdition par l'air moins rapide.

Enfin, si ces deux causes n'agissent pas ou se détruisent, il restera de préférence de l'électricité positive, puisque la déperdition de l'électricité négative est plus rapide surtout pour de grandes charges.

83. En même temps que la sphère influente A électrise par influence le conducteur voisin primitivement à l'état neutre, celui-ci réagit sur la sphère et y modifie la distribution. Si l'on touche les deux points a et a' par un plan d'épreuve, on constatera que la densité électrique est notablement plus grande en a qu'en a' : la couche électrique du corps influent s'est donc portée vers le conducteur voisin influencé. On peut mettre cette propriété en évidence d'une manière plus simple, en prenant comme corps influent un cylindre gros et court muni d'une paire de pendules à chaque extrémité. Quand ce cylindre est électrisé et éloigné de tout conducteur, les deux paires de pendules ont la même divergence. Approchons-le d'un conducteur isolé ou non, les pendules du point le plus éloigné s'abaissent et ceux de l'autre extrémité divergent davantage.

84. L'électricité produite par influence sur un conducteur peut elle-même agir sur un deuxième conducteur et y développer aussi de l'électricité par influence. Pour le démontrer, il suffit de disposer, à la suite du cylindre BC (fig. 46) et à une petite distance, un deuxième cylindre B'C' également isolé et muni de paires de pendules. Quand on approche le corps influent A, on voit diverger en même temps tous les pendules de BC et de B'C' et, pour montrer que la divergence de ces derniers n'est pas due à l'influence directe du corps A, il suffit d'écarter le cylindre BC : tous ces pendules retombent aussitôt. On trouverait d'ailleurs sur ce second cylindre B'C' une distribution électrique analogue à celle du premier, de l'électricité contraire dans la partie antérieure et de l'électricité de même nom en arrière. Ce deuxième cylindre pourrait agir de même sur un troisième, et ainsi de suite, mais les effets deviennent de plus en plus faibles.

Une expérience très-ingénieuse de Wilke s'explique par ces

influences successives. Deux cylindres conducteurs isolés sont ainsi placés à une petite distance suivant la même direction; entre les deux est une balle de liége suspendue à un fil de soie. Quand on approche un corps électrisé d'une de ces extrémités, la balle de liége se meut vivement d'un conducteur à l'autre et finit par s'arrêter si le corps influent reste immobile. On enlève alors le corps influent et le mouvement de la balle recommence pour cesser par degrés comme auparavant.

85. Le phénomène de l'influence étant établi, il faut étudier, en se tenant toujours au point de vue expérimental, comment diverses circonstances peuvent le modifier.

L'influence est d'autant plus grande que la distance est plus faible. Quand on éloigne la sphère influente, tous les pendules du cylindre BC se rapprochent, et la ligne neutre tend à se placer au milieu du cylindre. Quand on rapproche la sphère, les pendules se repoussent de plus en plus, et la ligne neutre se rapproche du corps influent.

L'influence augmente avec la longueur du conducteur influencé. Pour le démontrer, il suffit d'allonger le cylindre BC en le touchant au point C par un autre cylindre aussi isolé; la divergence des pendules voisins b, b', b'' devient plus grande, et la ligne neutre s'éloigne.

Si l'on met le cylindre BC en communication avec le sol en le touchant au point C avec la main, on produit le même effet que si ce conducteur était infiniment allongé; les pendules b, b' divergent encore davantage, le cylindre est électrisé d'une manière sensible dans toute sa longueur, et l'électricité est en totalité de signe contraire à celle du corps influent. Le même résultat a lieu, quel que soit le point touché. Si l'on met le doigt en B, par exemple, les pendules éloignés c, c' s'abaissent et les pendules b, b' se repoussent davantage, chargés encore d'électricité contraire, et en aucun point du conducteur on ne trouve d'électricité de même espèce que celle du corps influent; c'est l'expérience de Canton.

86. On montre souvent les effets d'influences avec des appareils un peu différents. On prend par exemple un cylindre BC (fig. 47) sur les extrémités duquel on a planté deux pendules

conducteurs *b* et *c* portés par des tiges de métal. Quand le corps A est électrisé, les pendules *b* s'écartent de leurs tiges en sens opposés. Sous cette forme, l'expérience n'est pas aussi concluante parce que la divergence du pendule *b* peut être attribuée à l'attraction qu'exerce le corps A et non à la répulsion de la tige ; il n'est donc pas démontré que l'extrémité B est électrisée.

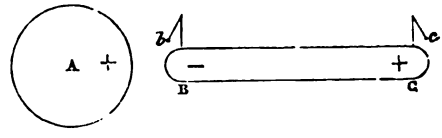


Fig. 47.

M. Riess [1] dispose le cylindre verticalement au-dessous de la sphère influente (fig. 48), et attache des pendules conducteurs le long du cylindre ; ces pendules s'écartent quand le cylindre est électrisé. Cette disposition est avantageuse dans les cours parce que le phénomène peut être rendu visible à un auditoire nombreux; mais elle vaut moins en théorie que celle d'Œpinus, parce que le pendule *b* est soumis en même temps à l'attraction du corps A, qui tend à le ramener dans la verticale, et à la répulsion du cylindre ; il arrive presque toujours que la divergence de ce pendule *b* est plus faible que celle du pendule extrême *c*. Il semblerait en résulter que la densité électrique serait plus grande en C qu'en B, ce qui est contraire à la vérité.

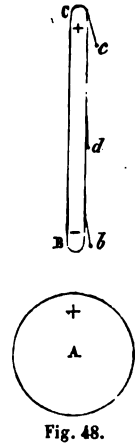


Fig. 48.

87. **Étincelle électrique.**—Lorsque la distance du corps influencé et du corps influent est assez faible, un trait de feu ou une étincelle électrique se produit entre eux. A la suite de cette étincelle, tous les pendules du cylindre divergent, le cylindre est chargé d'électricité de même nom que celle du corps influent dans toute son étendue ; en même temps la charge du corps influent a diminué d'autant, et l'électricité de nom contraire a disparu. Le résultat final est le même que si une partie de l'électricité du corps influent avait passé sur le cylindre par l'étincelle, mais cet effet est précédé d'une électrisation par influence, et l'étincelle a fait disparaître sur les deux corps des quantités d'électricités égales et de signes contraires. C'est là le phénomène que l'on veut tra-

[1] *Reibungs electricität*, bd. I, p. 178.

duire quand on dit que l'étincelle électrique est produite par la combinaison ou par la neutralisation réciproque de quantités égales d'électricités contraires.

88. **Explication élémentaire de l'influence électrique.** — Les phénomènes d'électrisation par influence sont une conséquence naturelle de l'hypothèse des fluides électriques; on peut les considérer comme un cas particulier du problème général de l'équilibre électrique à la surface des corps conducteurs. Lorsque différents conducteurs sont placés dans le voisinage de corps électrisés, il faut, pour que l'équilibre existe, que la résultante des forces électriques soit nulle en tous les points de chacun des conducteurs. Si la force électrique en un point n'est pas nulle, il s'y produit une décomposition du fluide neutre et une distribution nouvelle jusqu'à ce que la condition soit réalisée. On peut ainsi, par des considérations élémentaires, montrer le sens général du phénomène de l'influence et même traiter d'une manière complète un certain nombre de cas particuliers.

Supposons, par exemple, un cylindre conducteur BC (fig. 49) à l'état neutre, placé dans le voisinage d'une sphère électrisée A chargée d'électricité positive. L'équilibre n'a pas lieu : car en un point M quelconque du cylindre, le fluide positif d'un élément de fluide neutre est repoussé par la sphère, tandis que le fluide négatif est attiré; ces deux fluides vont donc se séparer, le premier marchant vers l'extrémité C, et le second vers l'extrémité B, et la décomposition continuera jusqu'à ce que la résultante des forces soit nulle. Comme les actions du fluide négatif de B et du fluide positif de C sont de même sens au point M, il faudra que la composante A′, parallèle à un axe quelconque, de l'action exercée en ce point par le corps influent sur une quantité de fluide égale à l'unité, soit égale à la somme des deux composantes B′ et C′, parallèles au même axe, des actions exercées au même point par les couches électriques situées en B et en C. On aura donc, pour un point quelconque situé dans l'intérieur du cylindre,

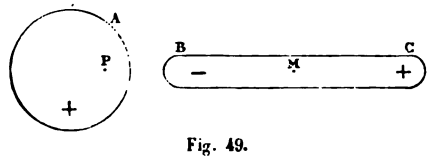


Fig. 49.

$$A' = B' + C',$$

et les deux masses nouvelles d'électricité égales et de signes contraires, séparées sur le cylindre, formeront à la surface deux couches distinctes, l'une en avant, l'autre en arrière.

Réciproquement, la distribution électrique a changé sur la sphère, sans quoi le fluide naturel qui est en un point quelconque P, situé dans l'intérieur de ce conducteur, serait décomposé; en effet, une couche homogène à la surface de la sphère n'exerce aucune action en ce point et l'électricité négative B du cylindre, agissant à une plus courte distance que l'électricité positive C, y produirait une séparation de fluides. Une portion de fluide positif influent s'est donc porté du côté du cylindre.

On voit immédiatement que la décomposition électrique sera d'autant plus grande que la distance des deux corps sera plus faible; car si, l'équilibre existant, on rapproche le cylindre, on augmente l'action de la sphère sur le point M, et les charges de B et de C devront augmenter pour qu'il s'établisse un nouvel état d'équilibre. En même temps, le changement de distribution qui s'opère à la surface du corps influent est aussi augmenté.

De même, la charge doit augmenter quand on allonge le cylindre : car, en éloignant l'électricité positive de l'extrémité C, on diminue son action en un point M, et l'équilibre ne peut être rétabli que par une nouvelle décomposition. Si la longueur du cylindre est indéfinie, ou, ce qui revient au même, si ce conducteur est mis en communication avec le sol, la charge positive est tellement éloignée qu'elle n'exerce plus d'action sensible au point M, la charge négative augmente encore et l'équation se réduit à $A' = B'$. L'électricité négative développée par influence est alors maximum, mais elle est toujours plus faible que celle du corps influent, puisqu'en agissant sur un point du conducteur non isolé, à une distance moindre, son action est égale à celle qu'exerce le corps influent sur le même point.

On expliquerait de même l'influence du premier cylindre isolé sur un second, de sorte que ces considérations très-simples suffisent pour rendre compte des principales circonstances du phénomène.

89. **Cas de sphères concentriques.** — Le problème peut être traité complétement si le corps influent est une sphère A (fig. 50), et le corps influencé une couche conductrice B com-

prise entre deux surfaces sphériques concentriques à la première. La sphère ayant une charge $-m$ d'électricité positive, le conducteur prend une charge $-m_1$ d'électricité négative sur sa surface interne et une charge $-m_2$ sur sa surface externe. Par raison de symétrie, ces trois couches sont homogènes ; pour l'équilibre, il faut que la résultante électrique en un point quelconque des deux conducteurs soit nulle. La force est nulle en tous les points de la sphère A, puisque les trois couches électriques sont sphériques et homogènes, et comprennent toutes le conducteur A. En un point P du conducteur B, la couche extérieure $+m_2$ n'exerce aussi aucune action : mais les deux couches $-m_1$ et $-m$, auxquelles le point P est extérieur, agissent en ce point comme si leurs masses étaient concentrées au centre commun ; il faut donc, pour que la résultante soit nulle, que ces deux masses soient égales et de signes contraires. Ainsi une charge électrique $+m$ sur la sphère A produit par influence une charge égale et de signe contraire sur la surface intérieure du conducteur B, et une autre charge égale et de même signe distribuée sur la surface extérieure.

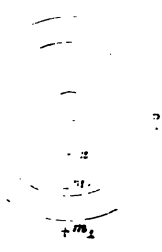


Fig. 30.

Remarquons que la couche extérieure $+m_2$ est en équilibre d'elle-même ; si l'on donne au conducteur B une charge quelconque positive ou négative, cette charge nouvelle se distribuera à la surface comme si l'intérieur était plein, et s'ajoutera algébriquement à la couche $+m_2$. En particulier, si la masse électrique ainsi apportée est égale à $-m_2$, ou bien si le conducteur B est mis en communication avec le sol, sa surface extérieure sera à l'état neutre, et rien ne sera modifié dans la distribution des couches internes. On peut remarquer encore que le conducteur B étant mis en communication avec le sol, la résultante des actions des deux couches $+m$ et $-m_1$ sur un point quelconque à l'extérieur est nulle.

90. **Théorème de Faraday.** — En réalité, ce n'est là qu'un cas particulier d'un théorème général énoncé par Faraday, que nous démontrerons plus tard.

« Quand un corps électrisé A est entouré complétement par un

conducteur B de forme quelconque, il se produit par influence sur la surface interne de ce conducteur une couche électrique, de masse égale et de signe contraire à celle du corps influent, dont la distribution dépend de la position et de la forme du corps électrisé, et, sur la surface externe du conducteur, une couche électrique de même masse distribuée régulièrement, comme s'il n'y avait pas d'électricité à l'intérieur. Si le conducteur B est mis en communication avec le sol, la couche externe disparaît, les couches internes ne sont pas modifiées et n'exercent aucune action sur un point extérieur. »

On peut vérifier ce théorème par quelques expériences remarquables de Faraday [1].

Un cylindre métallique A (fig. 51) bien isolé est mis en communication par un fil conducteur avec un électroscope E assez éloigné. On introduit dans le cylindre une boule C portée par un manche isolant et chargée par exemple d'électricité positive. Les pailles divergent et sont aussi électrisées positivement; la divergence augmente à mesure que l'on enfonce la boule C, jusqu'à ce que cette boule ait atteint un certain niveau; à partir de ce moment, la divergence des feuilles d'or reste constante, quelque position qu'occupe la boule, et elle ne change pas non plus quand la boule touche le cylindre. Cette dernière expérience montre bien que la couche électrique répandue à la surface extérieure du cylindre était égale à celle que possédait la boule C et distribuée régulièrement; si on enlève cette boule après le contact, on reconnaît en effet qu'elle est à l'état neutre. Le cylindre se comporte ainsi comme un conducteur complétement fermé, à partir du moment où l'ouverture est vue de la boule C sous un angle assez petit pour que l'influence qui s'exercerait dans cette direction puisse être négligée.

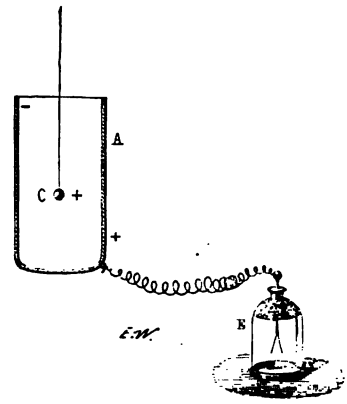


Fig. 51.

[1] *Experimental Researches*, t. II, p. 279.

Faraday a fait l'expérience d'une manière plus complète en employant 4 cylindres concentriques (fig. 52) séparés par des pieds en gomme laque, le dernier cylindre communiquant avec l'électroscope. Quand on introduit une boule électrisée dans la cavité centrale, les pailles de l'électroscope divergent comme si les cylindres intermédiaires n'existaient pas. Chacun d'eux s'est chargé de deux couches de signes contraires, toutes égales en valeur absolue à celle de la boule C; la charge extérieure du dernier cylindre est la même que si tous les cylindres intermédiaires étaient supprimés, et elle ne change pas quand on les met en communication ou qu'on les touche avec la boule électrisée C.

Les choses étant dans l'état primitif, si l'on met le cylindre intérieur n° 4 en communication avec le sol, les pailles de l'élec-

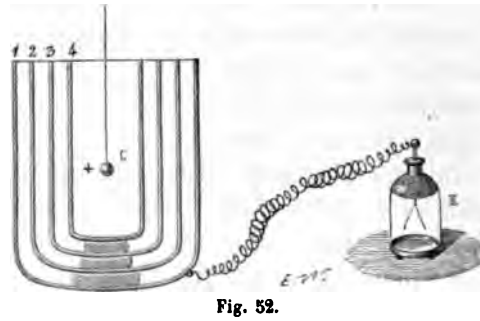


Fig. 52.

troscope retombent et les cylindres suivants sont tous à l'état neutre; les deux couches qui restent, positive sur C et négative sur le cylindre voisin, ont une action nulle sur tout point extérieur. De même si l'on avait mis en communication avec le sol un autre cylindre quelconque, tout ce qui lui eût été extérieur serait rentré à l'état neutre.

Enfin on peut introduire dans la cavité centrale une ou plusieurs boules électrisées ou des corps électrisés de forme et de nature quelconques, conducteurs ou non, les couches électriques qui seraient produites par chacun des corps s'ajoutent algébriquement; la charge extérieure du dernier cylindre et de l'électroscope est la même que si toutes les masses électriques introduites étaient réunies entre elles ou communiquées directement à ce cylindre.

91. **Influence sur un conducteur déjà électrisé.** — Les raisonnements qui précèdent s'appliquent sans difficulté à des cas plus complexes.

Si plusieurs conducteurs isolés sont soumis en même temps à l'influence d'un corps électrisé, chacun d'eux se charge de deux couches d'électricités contraires de façon que la force électrique résultant de l'action de toutes les couches en un point quelconque de l'un des conducteurs soit nulle. On voit aisément que plusieurs cylindres placés ainsi à la suite les uns des autres seront tous électrisés de la même manière, positivement d'un côté et négativement de l'autre.

Si le conducteur dont on approche un corps électrisé est déjà électrisé lui-même, l'influence ne s'en exerce pas moins, comme nous l'avons déjà vu par une expérience de Canton. L'état électrique du corps influent peut être considéré comme produit par la superposition de deux couches électriques différentes : 1° celle qui existait primitivement et qui conserve sa distribution; 2° celle qui serait produite par l'électricité du corps influent dans l'état qu'elle occupe actuellement. La première, en effet, étant en équilibre d'elle-même, n'exerce aucune action sur un point intérieur au conducteur ; la seconde couche avec le corps influent donne aussi, en chaque point de ce conducteur, une résultante nulle, et par suite l'équilibre existe.

Cette considération permet de prévoir aisément le sens du phénomène. Si un cylindre BC (fig. 49) soumis à l'influence d'une sphère positive, était primitivement chargé d'électricité positive, l'extrémité éloignée sera toujours positive. Mais, à mesure qu'on approchera le corps influent, la couche électrique au point B, qui était d'abord positive, diminuera peu à peu, puis deviendra nulle et enfin négative, si la charge de la sphère A est suffisante; les pendules du point B vont donc se rapprocher d'abord, puis diverger de nouveau. Si le cylindre était chargé primitivement d'électricité négative, les mêmes changements se produiraient à l'extrémité C ; on y verrait les pendules se rapprocher au contact et diverger ensuite, chargés cette fois d'électricité positive.

92. **Expériences de Coulomb.** — Nous donnerons ici le résumé des expériences de Coulomb sur l'influence électrique. Ces expé

riences ont été peu nombreuses, sans doute parce que les problèmes de ce genre présentent en général de grandes difficultés aussi bien au point de vue expérimental qu'au point de vue du calcul.

Coulomb a étudié d'abord le cas de deux sphères conductrices primitivement en contact et électrisées. Quand le contact a lieu, on sait que les deux surfaces n'ont pas d'électricité sensible dans une certaine étendue autour du point de contact.

Si les sphères sont d'égal diamètre et qu'on les sépare, l'électricité apparaît aux points les plus voisins et augmente peu à peu à mesure qu'on les éloigne l'une de l'autre, jusqu'à ce que la distance soit assez grande pour que les couches électriques soient sensiblement homogènes. En aucun point, on ne voit apparaître d'électricité contraire à la charge primitive.

Si les sphères sont de diamètres différents A et B (fig. 53), et qu'on les sépare à une petite distance (fig. 54), l'électricité apparaît aux deux points les plus voisins *a* et *b* situés sur le

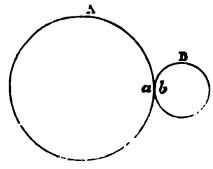


Fig. 53.

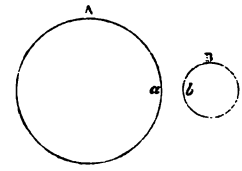


Fig. 54.

diamètre commun, mais en *a* sur la grande sphère, elle est de même signe que la charge primitive, et en *b*, elle est de signe contraire, de sorte que, sur la petite sphère B, il y a deux couches de signes différents séparées par une ligne neutre. A mesure qu'on éloigne la sphère B, la charge du point *b* va en augmentant d'abord, puis diminue jusqu'à zéro pour changer de signe ensuite et augmenter de nouveau, jusqu'à ce que la distance soit assez grande pour que l'influence soit négligeable. Le tableau suivant résume quelques expériences de Coulomb à ce sujet. Les deux premières colonnes indiquent les diamètres des deux sphères A et B, et la troisième la distance des deux sphères au moment où la densité électrique est nulle au point le plus voisin *b* de la petite sphère.

A	B	DISTANCE
11[p]	11[p]	0
11	8	1[p]
11	4	2[p]
11	2	2[p]5[l]
	et au-dessous.	

Poisson a traité par le calcul le problème général en supposant que les deux sphères dont on étudie l'influence réciproque sont électrisées de la même manière, mais dans un rapport différent de celui qui résulterait du contact, ou bien que les deux sphères sont chargées d'électricités contraires. Dans le premier cas, comme il est facile de le prévoir, à une distance assez petite, les deux points en regard seront chargés d'électricités différentes et il y aura de l'électricité contraire à la charge générale sur celle des deux sphères dont la charge totale est plus faible qu'elle ne l'eût été par le contact. Pour une distance plus petite encore, il se produira une étincelle, et la charge générale se partagera régulièrement entre les deux sphères.

Dans le second cas, les sphères étant chargées d'électricités contraires, il peut encore arriver, pour une certaine distance et des charges convenables, que les deux points les plus éloignés, aux deux extrémités du diamètre commun, soient chargés d'électricités de même nom, une nouvelle décomposition électrique ayant eu lieu par suite de l'influence sur l'un des conducteurs en présence. A une distance suffisamment petite il se produit encore une étincelle, et les deux corps se partagent la somme algébrique des charges primitives, c'est-à-dire l'excès de l'une d'elles sur l'autre.

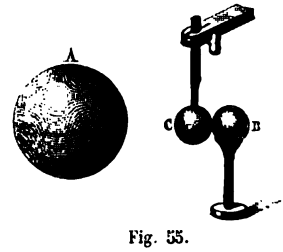


Fig. 55.

95. Coulomb plaça ensuite deux sphères B et C (fig. 55), de 2 pouces de diamètre, en contact et primitivement à l'état neutre, à une distance de 2 pouces d'une sphère A électrisée, de 8 pouces de diamètre. Les deux sphères B et C sé-

parées avaient des charges égales et de signes contraires; le rapport des densités moyennes sur A et sur l'une des sphères B ou C a été

$$\frac{A}{B} = 2{,}70.$$

Plaçant de même, à une distance de 2 pouces de la sphère A, quatre autres sphères égales B_1, B_2, B_3, B_4, disposées dans l'ordre des indices en se rapprochant de la sphère influente, il a trouvé pour les densités moyennes

$$A = -1{,}50\ B_4 = 2{,}20\ B_1;$$

la charge des petites sphères extrêmes croît donc quand on en augmente le nombre.

94. Lorsqu'un cylindre B (fig. 56), terminé par une calotte hémisphérique et communiquant avec le sol, est placé auprès d'une sphère électrisée, la densité électrique β au point *b* du cylindre le plus voisin de la sphère est à peu près en raison inverse de la puissance $\frac{3}{2}$ de la distance de ce point au centre de la sphère.

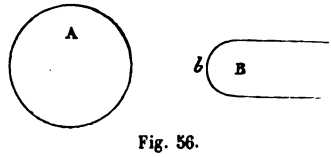


Fig. 56.

Si l'on met à la même distance différents cylindres, la densité au point *b* est en raison inverse du diamètre du cylindre, pourvu que ce diamètre soit très-petit par rapport à celui de la sphère A. De plus, la densité au point *b*, quel que soit le diamètre du cylindre, est double de celle qui existe sur les différents points d'une section normale à l'axe, faite à une distance du point *b* égale au diamètre du cylindre. En résumé, en désignant par α la densité moyenne de la sphère, par R et *r* les rayons de la sphère et du cylindre et par *d* la distance minimum des deux surfaces, on a sensiblement

$$\frac{\beta}{\alpha} = -m\,\frac{R^2}{(R+d)^{\frac{3}{2}}\,r}.$$

Pour R = 4 pouces, $r = \frac{1}{2}$ p., $d = 2^p{,}5$, l'expérience a donné $\frac{\beta}{\alpha} = -4$; on en déduit $m = 2{,}7$.

Cette formule n'a sans doute pas de valeur théorique qui permette de la comparer avec les résultats du calcul, mais on peut en déduire des conséquences intéressantes au point de vue de la pratique. On comprend par là le rôle des conducteurs cylindriques allongés dans les machines électriques, et l'on voit aussi pourquoi il vaut mieux employer des cylindres de petits diamètres dans les expériences d'influence électrique, si l'on veut que les pendules éprouvent de grandes divergences.

95. La même formule servira encore à donner une idée du jeu des paratonnerres. Supposons, par exemple, avec Coulomb (1) que l'on ait

$$\begin{aligned} R &= 1000 \text{ pieds}, \\ d &= 500 \text{ —}, \\ 2r &= 1 \text{ pouce}; \end{aligned}$$

ce qui correspondra à peu près au cas d'un nuage électrisé de 2000 pieds de diamètre situé à une distance de 500 pieds d'un paratonnerre ayant un pouce de diamètre à son extrémité. Avec la valeur précédente de m, la formule donne

$$\frac{\beta}{\alpha} = -278.$$

Comme, en réalité, la puissance à laquelle il faut élever la distance $(R + d)$ est inférieure à $\frac{3}{2}$, il en résulte que la densité électrique à la pointe du paratonnerre est, en valeur absolue, supérieure à 278 fois la densité électrique à la surface du nuage. On comprend que, si l'influence du nuage n'a pas été trop brusque, l'électricité s'échappe d'une manière continue et vienne décharger le nuage sans production d'étincelle.

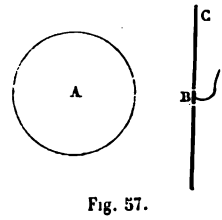


Fig. 57.

96. Une dernière expérience de Coulomb est relative au cas d'un disque circulaire conducteur BC (fig. 57) de 16 pouces de diamètre communiquant avec le sol, et placé en face d'une sphère électrisée A de 8 pouces de diamètre. La densité au milieu B du disque est en

(1) *Mém. de l'Académie* (1788), p. 690.

raison inverse du carré de la distance de ce point au centre de la sphère. Cette expérience offre un intérêt particulier à cause de la méthode qu'a employée Coulomb. Pour déterminer la densité au point B, sans risquer de troubler la distribution par l'approche du plan d'épreuve, Coulomb a ménagé en ce point une petite ouverture telle qu'en se plaçant derrière le disque et mettant en ce point le plan d'épreuve, la surface était complétée et continue ; en enlevant ensuite le plan d'épreuve, on détachait pour ainsi dire une portion de la surface elle-même.

97. **Rôle des pointes dans les phénomènes d'influence.** — La propriété que possèdent les pointes de laisser échapper l'électricité des conducteurs avec lesquels elles sont en communication permet de modifier dans certains cas les effets d'influence.

Si l'extrémité éloignée C du corps influencé (fig. 46) est munie d'une pointe, l'électricité de même nom que celle du corps influent s'échappe par la pointe, comme on le voit par l'aigrette dans l'obscurité, et le cylindre finira par prendre exactement la même charge que s'il était en communication avec le sol. Si la pointe est placée sur la ligne neutre, elle ne produit aucun effet. Si elle est posée sur la partie antérieure du cylindre, au point B par exemple, elle laisse échapper l'électricité de nom contraire qui va détruire une partie de l'électricité du corps influent, et le cylindre prend une charge plus grande d'électricité du même nom, comme s'il y avait eu une étincelle. L'aigrette qui se produit alors n'est pas autre chose, en effet, qu'un ensemble de petites étincelles. Si le conducteur est en communication avec le sol, la fuite d'électricité contraire par la pointe continue jusqu'à ce que le corps influent soit amené presque à l'état neutre.

Les expériences suivantes, empruntées à Franklin, mettent bien ces phénomènes en évidence. Quand on approche du conducteur d'une machine électrique en mouvement une tige de métal terminée en boule et communiquant avec le sol (fig. 58), il se produit, lorsque la distance est assez faible, une étincelle qui décharge brusquement le conducteur ; le pendule de l'électroscope retombe aussitôt dans la verticale pour se relever peu à peu jusqu'à ce qu'il se produise une nouvelle étincelle. Si, au contraire, on approche de la machine une pointe conductrice

que l'on tient à la main (fig. 59), la machine se décharge aussitôt, l'électroscope du conducteur baisse immédiatement et l'écoulement continuel d'électricité négative par la pointe se traduit par une lueur qui apparaît et se maintient à l'extrémité de cette pointe tant que la machine fournit de l'électricité positive.

Il suffit de recouvrir la pointe avec le doigt pour que l'effet soit

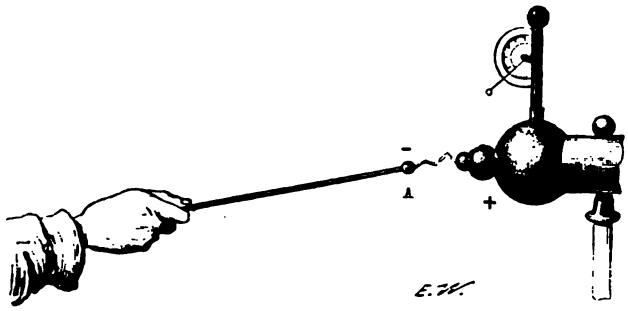


Fig. 58.

détruit et que l'électroscope se relève. En prenant la pointe entre deux doigts que l'on relève peu à peu jusqu'à l'extrémité, on diminue peu à peu son influence, et l'électroscope se relève successivement ; il suffit même de mettre la pointe dans l'intérieur

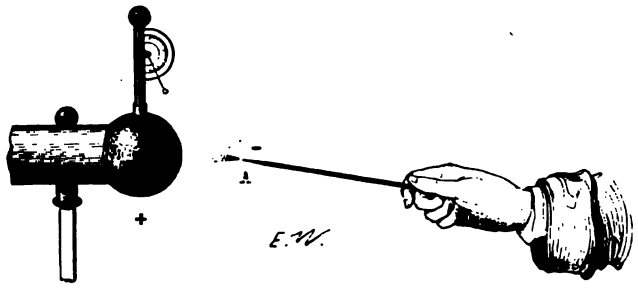


Fig. 59.

d'une cavité formée en rapprochant les doigts du pouce pour qu'elle cesse d'agir.

Si l'on approche des filaments de coton du conducteur de la machine, ces filaments restent suspendus par l'attraction électrique et se maintiennent normalement au conducteur ; aussitôt qu'on leur présente la pointe ils s'appliquent sur la surface. De

même, quand on met en communication avec la machine une mèche de cheveux ou une houppe de fils de coton, les cheveux et les filaments se dressent et forment un faisceau divergent à cause de leur répulsion réciproque; on en approche une pointe avec la main, les cheveux et les filaments retombent aussitôt.

98. **Phénomènes d'influence dans les attractions et les répulsions électriques.** — Quand un corps à l'état neutre est attiré par un corps électrisé, l'attraction est d'abord précédée d'une électrisation par influence du corps neutre; c'est donc un cas particulier de l'attraction des corps chargés d'électricités contraires, et les forces peuvent être considérées comme s'exerçant uniquement entre les fluides électriques eux-mêmes.

Comme la distribution de l'électricité, sur des conducteurs électrisés en présence, n'est pas la même que si ces conducteurs n'étaient pas soumis à leur influence réciproque, il peut arriver que cette distribution nouvelle modifie beaucoup les phénomènes d'attraction et de répulsion.

Par exemple, si deux sphères conductrices chargées de la même électricité sont en présence, les couches électriques seront rejetées vers les points les plus éloignés et la répulsion sera plus faible que si les masses électriques étaient concentrées aux centres des deux sphères. Il peut même arriver que la répulsion soit changée en attraction : il suffit pour cela que les charges des deux sphères soient inégales et qu'on les approche à une distance assez petite. Les surfaces en regard seront alors chargées d'électricités contraires et l'attraction qui s'exerce entre elles pourra être assez grande pour dominer la répulsion qui a lieu entre les fluides de même nom. C'est là une circonstance à laquelle il faut prendre garde dans les expériences. Quand on veut, par exemple, repousser un pendule électrique par un corps électrisé de la même manière, il faut approcher ce corps très-lentement et noter le premier effet produit; si on l'approchait trop brusquement, on pourrait obtenir une attraction à cause de l'électrisation par influence, et en tirer des conséquences erronées sur la nature des électricités en présence. Il faut prendre les mêmes précautions dans l'emploi d'un électroscope quelconque.

De même, si deux sphères en présence sont chargées d'électricités contraires, ces électricités s'accumulent sur les faces

voisines ; l'attraction totale est alors plus grande que si les couches électriques étaient homogènes et par conséquent plus grande que si les masses électriques étaient concentrées aux centres des deux sphères.

On conçoit combien cette circonstance peut troubler la vérification de la loi des actions électriques et pourquoi, dans les expériences faites sur ce sujet avec la balance de torsion, il faut avoir soin que la distance des boules soit toujours assez grande par rapport à leurs dimensions linéaires.

99. **Électroscope à feuilles d'or.** — Comme application des phénomènes d'influence, nous décrirons ici un instrument dont nous nous sommes déjà servis et auquel nous aurons recours fréquemment pour reconnaître si un corps est électrisé et de quelle espèce d'électricité : c'est l'*électroscope à feuilles d'or.*

Cet appareil (fig. 60) se compose essentiellement d'une tige de métal BB′, terminée à la partie supérieure par une boule B et portant à la partie inférieure deux feuilles d'or *a* et *b*. Cette tige est mastiquée dans la tubulure d'une cloche en verre dont toute la partie courbe est recouverte d'un vernis à la gomme laque. La cloche repose sur un plateau de métal portant à l'intérieur deux tiges métalliques *c* et *d* terminées en boule et placées en regard des feuilles d'or. Lorsque les feuilles sont électrisées, les tiges communiquant avec le sol se chargent par influence d'électricité contraire et, chacune d'elles attirant la feuille la plus proche, la divergence est notablement augmentée. Les feuilles d'or sont d'ailleurs assez courtes pour ne pouvoir toucher ni les tiges de métal ni, à plus forte raison, les parois de la cloche : en évitant ainsi tout contact, on ne risque pas de déchirer les feuilles ni de déposer à la surface du verre les traces d'électricité qui nuiraient beaucoup aux observations. Enfin, pour mieux assurer l'isolement du conducteur BB′, on place dans l'intérieur de la cloche une soucoupe renfermant des matières desséchantes, telles que de la chaux vive ou du chlorure de calcium. Quelquefois même on pousse la précaution plus

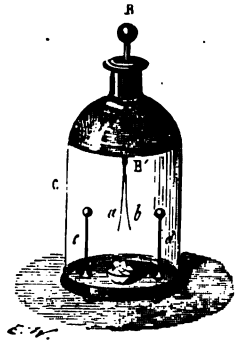


Fig. 60.

loin. On entoure la cloche d'une cage rectangulaire en verre percée sur sa paroi supérieure d'un trou assez large pour laisser passer librement la tige de l'électroscope ; cette cage repose sur une boîte en bois munie d'un tiroir dans lequel on place des matières desséchantes. De cette façon les parois de la cloche sont parfaitement sèches à l'extérieur et à l'intérieur et l'appareil peut rester chargé pendant très-longtemps.

On peut se servir de cet électroscope de deux manières :

1° L'instrument étant à l'état neutre, on en approche lentement le corps à étudier : si les pailles divergent, c'est que le corps est électrisé. On pose alors le doigt sur le bouton, les pailles reviennent au contact et l'électroscope reste chargé d'électricité *contraire* à celle du corps influent ; on enlève alors le doigt, puis le corps influent, et les pailles divergent de nouveau. On approche ensuite de l'électroscope lentement et alternativement un bâton de verre poli et un bâton de résine frottés avec du drap : celui des deux dont le premier effet est de produire un accroissement de divergence des pailles est chargé de la même électricité que celle de l'électroscope et, par suite, d'électricité contraire à celle du corps proposé.

Cette nécessité de provoquer un accroissement de divergence pour obtenir une expérience démonstrative tient à ce que, si l'on approche du bouton de l'électroscope un conducteur à l'état neutre, ce conducteur s'électrise par influence et, réagissant sur la tige de l'électroscope, attire l'électricité à la partie supérieure, ce qui produit un rapprochement des feuilles d'or. L'effet est encore plus marqué si le conducteur n'est pas isolé ; il suffit, par exemple, d'approcher la main du bouton pour faire baisser les feuilles. Toutefois, il est facile d'éviter cette cause d'erreur. Si le corps étranger renferme une quantité d'électricité notablement plus grande que celle de l'électroscope, ce qui est le cas général, on verra, en l'approchant lentement, les feuilles baisser peu à peu jusqu'au contact, puis diverger de nouveau de plus en plus. Quand on éloigne lentement le corps étranger, les pailles reviennent d'abord au contact, puis divergent et reprennent leur position primitive. Dans ce cas, l'expérience est concluante et l'on peut affirmer que le corps et l'électroscope sont chargés d'électricités contraires.

Il résulte aussi de cette expérience que, si l'on approchait trop brusquement un corps électrisé d'un électroscope, on pourrait ne pas apercevoir le premier abaissement des feuilles et constater seulement la divergence finale, ce qui conduirait à une conclusion erronée. Il faut donc approcher les corps de très-loin et lentement, afin d'observer le premier effet produit sur les feuilles, diminution ou accroissement de divergence.

2° Une autre manière d'opérer, qui convient surtout quand on veut examiner rapidement et successivement plusieurs corps différents, consiste à charger d'abord l'électroscope d'une électricité connue, positive par exemple, et d'en approcher le corps que l'on veut étudier. Si le premier effet produit est un accroissement de divergence, on peut en conclure que le corps est électrisé de même manière que l'électroscope, c'est-à-dire positivement. Si le premier effet est une diminution de divergence, il faut rapprocher davantage le corps et chercher à produire d'abord le contact des feuilles, puis une nouvelle divergence. On est alors certain que le corps est électrisé et d'électricité contraire à celle de l'électroscope.

100. **Phénomènes d'influence avec les corps mauvais conducteurs.** — Si le corps influent est mauvais conducteur, le corps influencé étant conducteur et maintenu à une certaine distance, les phénomènes sont les mêmes que ceux qui ont été décrits plus haut, avec cette différence que la réaction sur le corps influent sera nulle ou très-faible à cause de la difficulté qu'éprouve l'électricité à se déplacer dans les corps mauvais conducteurs.

Il n'en est pas de même si le conducteur électrisé par influence est mis en contact avec le corps isolant. Dans ce cas, à moins que la charge électrique du corps isolant ne soit extrêmement grande ou que le conducteur ne soit terminé par des parties allongées, il ne se produit pas d'étincelle, et les deux surfaces en contact se maintiennent chargées d'électricités contraires. C'est là une propriété importante des corps isolants qui est utilisée dans l'électrophore. Après avoir chargé un gâteau de résine d'électricité négative en le frappant avec une peau de chat, on pose sur ce gâteau un disque conducteur tenu par un manche isolant. On met le disque en communication avec le sol en le touchant avec la main : ce disque reste chargé d'électricité positive sur la face

qui touche le gâteau. En effet, si l'on détache la main et qu'on enlève le disque par son manche isolant, on le trouve chargé d'une quantité d'électricité positive assez grande pour qu'en approchant le doigt on en tire une longue étincelle, et l'état électrique du gâteau n'a pas été modifié.

Si l'on répète la même expérience en mettant le disque conducteur en contact par sa tranche avec le gâteau, les phénomènes sont modifiés : on entend une étincelle entre le gâteau et le disque; l'électricité positive du disque s'est répandue sur le gâteau autour du point de contact après avoir neutralisé l'électricité négative qui s'y trouvait et, si on enlève le disque comme précédemment, on le trouve encore électrisé positivement, mais d'une quantité très-faible. Quant au gâteau de résine, il possède maintenant autour du point de contact une plage d'électricité positive, séparée par une zone à l'état neutre de la surface générale qui reste chargée d'électricité négative. Pour mettre en évidence cet état électrique du gâteau, on peut employer un artifice imaginé par Lichtenberg (1). On secoue dans un petit soufflet un mélange de minium et de soufre en poudres fines, et on projette ce mélange sur le gâteau. Par leur frottement réciproque, les deux poudres se sont électrisées, le soufre négativement, le minium positivement, et elles se séparent en tombant sur le corps électrisé : le soufre dessine en jaune la plage positive autour du point de contact, la poudre rouge du minium se répand sur la surface qui reste électrisée négativement, et ces deux régions sont séparées par une zone neutre où la résine reste à nu.

On peut encore faire l'expérience plus simplement en traçant avec le doigt des caractères sur un gâteau de résine fortement électrisé. Quand on projette ensuite sur ce gâteau le mélange des deux poudres, tous les traits se dessinent en jaune bordé de noir sur un fond général coloré en rouge

101. Ces expériences font déjà présumer que l'influence électrique sur un corps mauvais conducteur doit être très-faible. Un corps absolument isolant ne devrait s'électriser par influence en aucune façon ; mais, en réalité, il n'y a pas de corps qui satisfasse à cette condition rigoureuse et tous s'électrisent plus

(1) *De Nova Methodo Naturam ac motum fluidi electrici investigandi.* Gottingue (1778).

ou moins. Il est utile d'envisager encore cette question à deux points de vue, suivant que l'influence a lieu à distance ou bien qu'elle s'exerce au contact.

Pour montrer l'existence du phénomène de l'influence sur les corps mauvais conducteurs, il suffit d'approcher un corps électrisé d'un pendule formé par une boule de gomme laque; l'attraction est notablement plus faible que si la boule était conductrice, que si par exemple elle était recouverte d'une feuille d'or, mais cette attraction existe toujours, ce qui indique qu'il s'est effectué une certaine séparation des fluides électriques.

M. Matteucci (1) a fait à ce sujet quelques expériences plus précises. Il a suspendu à un brin de soie dans l'intérieur d'une cage en verre des aiguilles isolantes de 8 à 10 millimètres de longueur sur 2 millimètres d'épaisseur, de manière à constituer un appareil analogue à l'électroscope de Coulomb. En approchant un corps électrisé d'une de ces aiguilles, on les voit osciller comme un pendule, et l'on peut constater que les deux extrémités sont électrisées en sens contraires. Quand on enlève le corps influent, l'aiguille revient aussitôt à l'état neutre. La quantité d'électricité ainsi obtenue est d'ailleurs extrêmement faible; on l'explique, comme l'aimantation du fer doux, en admettant une sorte de polarisation des molécules : chaque molécule ou du moins chaque tranche du corps isolant se charge d'électricité contraire à celle du corps influent sur la face la plus voisine et d'électricité de même nom sur la face la plus éloignée; toutes les couches intermédiaires se neutralisent, et il n'y a que les couches extrêmes dont l'effet soit appréciable.

M. Matteucci a comparé, avec la balance de torsion, les attractions exercées par une boule électrisée sur d'autres boules de natures différentes à l'état neutre. Quand la boule neutre est très-petite, elle subit la même attraction quelle que soit sa nature, mais une différence s'établit bientôt quand les dimensions augmentent, et elle devient d'autant plus grande que les dimensions sont plus considérables. Dans d'autres expériences il a employé la méthode des oscillations en faisant agir sur une petite aiguille électrisée des sphères de 15 centimètres de diamètre et

(1) *Annal. de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XXVII, p. 140.

de natures différentes, à l'état neutre. La distance du ce
la sphère étudiée et de la boule du pendule ayant été de 1
limètres dans un cas et de 120 millimètres dans l'aut
trouvé les résultats suivants pour le rapport des forces :

NATURE DE LA SPHÈRE	DISTANCE DES CENTRES	
	100mm	120mm
Plomb.	1	1
Soufre.	0.607	0.525
Résine	0.476	0.480

L'action exercée sur le soufre et la résine est donc la
environ de celle qui a lieu pour un métal.

102. L'influence est plus énergique au contact et en
temps elle donne lieu à des effets persistants.

Œpinus avait déjà constaté que si l'on met l'extrémi
bâton de verre en contact pendant quelques instants avec
ducteur d'une machine électrique et qu'on l'enlève ensu
trouve sur le verre, dans le voisinage du contact, une zo
trisée positivement comme la machine, plus loin une zon
tive, puis une autre zone positive, et ces alternatives peu
reproduire cinq ou six fois le long du bâton. L'expérience
plus facilement avec un bâton de cire d'Espagne, de résin
gomme laque. On met d'ailleurs ces différentes zones
dence par le procédé des figures de Lichtenberg en projet
le bâton, avec un soufflet, un mélange de fleur de soufr
minium; les régions positives se couvrent de la poussièr
du soufre et les régions négatives de la poudre rouge du m

Toutefois, l'observation d'Œpinus est incomplète, parc
début de l'expérience, les points du verre qui sont en
avec le conducteur sont chargés par influence d'électrici
traire qui disparaît plus ou moins lentement; c'est à ca
cela qu'un corps léger reste en contact pendant quelque
avec un corps électrisé avant d'en être repoussé. On pe
l'expérience avec une balance de torsion dont la boule

est isolante et à l'état neutre et la boule fixe conductrice et électrisée ; dans ce cas, la boule mobile se maintient en contact quelque temps avec la boule fixe avant d'être repoussée. Le contact est encore plus long si la boule fixe est elle-même isolante.

Les expériences suivantes, indiquées par M. Matteucci, montrent bien le détail de ce phénomène. Sur un gâteau de résine on pose un petit disque isolant électrisé positivement, par exemple, et on l'enlève au bout de quelques instants. En projetant sur ce gâteau le mélange de minium et de soufre, on reconnaît qu'à l'endroit où était posé le disque il y a une plage négative ; autour de cette plage est une zone circulaire positive, puis une zone négative suivie d'une autre zone positive, etc., et l'on peut constater cinq ou six alternatives régulières, si la surface de la résine est parfaitement plane et si elle était bien à l'état neutre. Si le contact a duré assez longtemps, la plage négative disparaît par suite de la production d'un certain nombre de petites étincelles ; la tache centrale est alors positive et entourée, comme précédemment, d'anneaux alternatifs.

Avec un disque électrisé conducteur, on peut obtenir le premier effet, la tache de signe contraire, quand la charge est faible et qu'on opère rapidement ; mais si la charge est plus forte et si le contact se prolonge, ce premier effet disparaît, la tache centrale est positive et la suite des anneaux se produit de même.

Une expérience de Faraday (1) s'explique de même par l'élec-

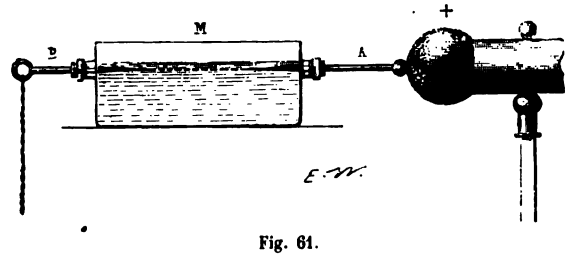


Fig. 61.

trisation polaire des corps mauvais conducteurs. On met des brins de fil de soie ou des fragments de fil de verre dans un vase en verre (fig. 61) contenant de l'essence de térébenthine ; deux

(1) *Experimental Researches*, t. I, p. 429.

parois opposées de ce vase sont traversées par des tiges métalliques A et B terminées en pointe dans le liquide. On met l'une de ces tiges en communication avec le sol et l'autre avec une machine électrique; on voit aussitôt les fragments de soie ou de verre accourir de tous les points du liquide et former une chaîne continue d'une pointe à l'autre; cette chaîne offre une assez grande résistance à la rupture et se reforme après qu'on l'a rompue. Les différents éléments de cette chaîne sont chargés d'électricités contraires à leurs extrémités et rattachés entre eux par leurs pôles opposés. Aussitôt que l'on supprime les communications ou qu'on décharge la machine, tous ces fragments se dispersent.

103. M. Matteucci a cherché à déterminer le rapport des charges enlevées à un conducteur électrisé par le contact de divers isolants. Il se servait pour cela d'une balance de torsion chargée à la manière ordinaire; il touchait la boule fixe pendant un certain temps par une plaque carrée formée d'une matière isolante et, après avoir enlevé cette plaque, il mesurait la diminution de torsion nécessaire pour ramener la boule mobile à la même distance que précédemment. En répétant cette expérience avec diverses substances, il a obtenu les résultats suivants :

SUBSTANCES	DISTANCE DES BOULES	TORSION DE L'INDEX	TORSION APRÈS 5′ DE CONTACT	PERTE DE TORSION
Soufre	58°	258°	231°	27°
Gomme laque. . .	»	259	230	29
Verre	»	259	40	219

Les résultats relatifs au soufre et à la gomme laque sont identiques, et le verre prend beaucoup plus d'électricité, ce qui est d'accord avec les expériences de Coulomb sur la déperdition par les supports mauvais conducteurs. En vernissant le verre à la gomme laque, on l'améliore; mais il faut que la couche ait au moins un quart de millimètre d'épaisseur pour que le verre se comporte comme la gomme laque elle-même.

erve aussi par les expériences précédentes que l'électri-

cité négative se propage plus facilement que l'électricité positive à la surface des corps mauvais conducteurs et cette circonstance permet d'expliquer quelques-unes des particularités que présentent les figures de Lichtenberg. On peut produire sur un gâteau de résine des couches électrisées de manières différentes, soit en promenant le doigt, comme nous l'avons indiqué déjà, sur un gâteau fortement électrisé par une peau de chat, soit en y traçant des lignes avec un conducteur électrisé positivement ou négativement. Quel que soit le procédé employé pour obtenir ces différents états électriques, quand on projette sur un pareil gâteau un mélange de soufre et de minium, on remarque que l'électricité négative se répand d'une manière à peu près uniforme à une distance notable et présente l'apparence de taches d'huile largement étalées, tandis que les lignes électrisées positivement ont des contours plus arrêtés et présentent de tous côtés des ramifications déliées.

104. Pénétration de l'électricité dans les corps isolants. — Non-seulement l'électricité se propage à la surface, mais elle pénètre dans l'intérieur des corps isolants, comme cela résulte déjà de ce qui précède. Faraday a fait à ce sujet (1) des expériences nombreuses.

Une plaque C de matière isolante, soufre ou spermaceti (blanc de baleine), par exemple (fig. 62), est couverte sur deux faces opposées par des plateaux métalliques *a* et *b* dont l'un communique avec une machine électrique et l'autre avec le sol. Après avoir fait fonctionner la machine pendant 10 ou 15 minutes, on décharge les plateaux *a* et *b* et on les isole; si on les examine aussitôt avec attention, ils paraissent tous deux absolument neutres, mais, au bout de quelques instants, le plateau *a* se montre de nouveau positif et le plateau *b* négatif.

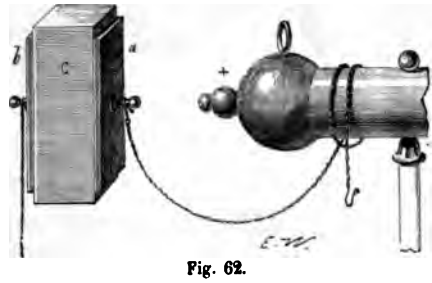


Fig. 62.

(1) *Experimental Researches*, t. I, p. 390.

L'électricité positive fournie au plateau *a* par la machine, et l'électricité négative produite sur le plateau *b* par influence, ont pénétré peu à peu, par suite de la répulsion des plateaux, dans la profondeur du corps isolant, puis sont revenues vers la surface et sur les plateaux après que ceux-ci ont été ramenés à l'état neutre.

L'expérience suivante est encore plus démonstrative. Deux plaques de spermaceti C et D (fig. 63) sont appliquées l'une sur l'autre et recouvertes sur les faces extérieures de plateaux métalliques *a* et *b*, dont le premier communique avec une machine et le second avec le sol. L'appareil est chargé pendant plusieurs minutes, puis déchargé et isolé : les plateaux *a* et *b* ne manifestent alors aucune trace d'électricité, mais aussitôt qu'on sépare les plaques C et D, les plateaux se montrent fortement électrisés, *a* positivement et *b* négativement ; les deux couches électriques de signes contraires étaient donc situées de part et d'autre de la ligne médiane du corps isolant.

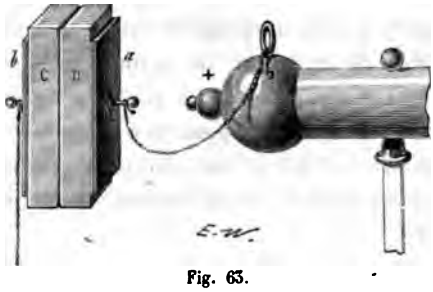


Fig. 63.

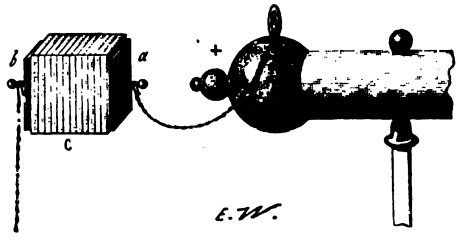


Fig. 64.

Le même phénomène a lieu si le corps isolant est discontinu. Ainsi M. Matteucci (1) a répété cette expérience à l'aide d'une pile formée d'un grand nombre de lames de mica (fig. 64) comprises entre deux plaques de métal *a* et *b*. L'appareil ayant été chargé par la machine pendant quelques minutes, puis déchargé, on a démonté aussitôt la pile de lames et constaté que toutes celles qui étaient situées vers l'extrémité la plus voisine de la machine avaient un excès

(1) *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXIII, p. 458.

d'électricité positive, et celles de l'autre extrémité de l'électricité négative.

Le mécanisme du phénomène qui a lieu dans ces expériences de M. Matteucci et de Faraday est, d'ailleurs, assez complexe, et nous y reviendrons à propos de la condensation; mais il est facile de démontrer la pénétration de l'électricité par des épreuves plus directes.

On met, par exemple, un cylindre d'acide stéarique (une bougie) en contact pendant quelque temps et par ses différents points avec une machine électrique ; ce cylindre est alors fortement chargé d'électricité positive. On le touche avec la main sur toute sa surface sans le frotter, ou on le pose sur un corps conducteur non isolé ou mieux encore on le fond superficiellement : toute électricité disparaît. En abandonnant ensuite ce cylindre à lui-même, on le retrouve au bout de quelques instants électrisé positivement.

L'expérience suivante est encore plus simple. On charge fortement un bâton de résine ou de cire d'Espagne d'électricité positive en le mettant en contact avec le conducteur d'une machine. On frotte ce bâton légèrement avec du drap ; on reconnaît qu'il est chargé d'électricité négative. En abandonnant ensuite ce bâton lui-même, l'électricité négative disparaît peu à peu, et on reconnaît bientôt qu'il est électrisé positivement. L'électricité qui avait pénétré dans les couches plus profondes est revenue peu à peu, vers la surface, neutraliser l'électricité contraire et ensuite devenir prédominante.

105. **Modification des effets d'influence par les corps interposés.** - Dans plusieurs des expériences qui précèdent, le corps électrisé et le conducteur soumis à l'influence ont été séparés par une couche d'un corps mauvais conducteur, liquide ou solide, au lieu d'être placés dans l'air. Alors, non-seulement l'influence a encore lieu comme nous l'avons vu, mais elle est notablement augmentée. On peut faire l'expérience d'une manière très-simple : maintenant un corps électrisé au-dessus de la boule d'un électroscope à feuilles d'or. Ces feuilles s'électrisent de la même manière que le corps influent et divergent ; l'introduction d'un corps isolant, entre la boule de l'électroscope et le corps influent, fait augmenter la divergence des pailles.

Cette expérience est délicate ; elle donne souvent des résultats contraires à ceux qu'on attend, la divergence des pailles diminuant au lieu d'augmenter par suite de l'introduction des corps intermédiaires, et plusieurs physiciens ont même annoncé que la diminution d'influence était le fait général. Nous verrons quelles peuvent être les causes perturbatrices du phénomène, mais il importe de réussir à montrer l'accroissement d'influence comme nous l'avons annoncé.

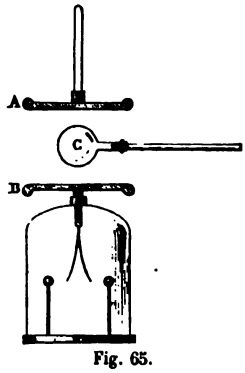


Fig. 65.

On emploie pour cela un électroscope condensateur (fig. 65). Le plateau supérieur A étant électrisé, on le suspend à une certaine distance au-dessus du plateau inférieur B, de manière à produire une divergence des feuilles d'or. On introduit entre les deux plateaux un ballon de verre C, une boule de soufre ou de résine, portés par des manches isolants, et les pailles s'écartent davantage.

106. **Pouvoir inducteur spécifique.** — Faraday a attaché une grande importance au rôle des milieux isolants au travers desquels s'effectue l'influence, milieux auxquels il donne le nom de *diélectriques*, et il a mis ce rôle en évidence de la manière suivante (1).

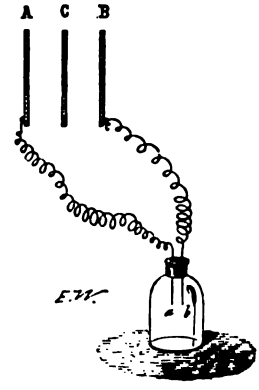


Fig. 66.

Un plateau conducteur C (fig. 66) est isolé et fixe. A droite et à gauche on dispose deux autres plateaux conducteurs A et B isolés aussi, et communiquant séparément par des fils de cuivre avec deux feuilles d'or *a* et *b* ; ces feuilles sont isolées l'une de l'autre, suspendues dans une cloche en verre et séparées par un intervalle de quelques centimètres. Les plateaux A et B étant à égale distance du plateau intermédiaire C, on charge ce dernier d'électricité positive ; on met les plateaux A et B en communication avec le sol, puis on les isole. Ces deux pla-

(1) *Experimental Researches*, t. I, p. 415.

teaux sont alors électrisés négativement de la même manière, et les feuilles d'or avec lesquelles ils communiquent n'ont pas d'électricité libre appréciable : elles restent verticales. Les choses étant dans cet état, on approche le plateau A du plateau C, et aussitôt on voit les deux feuilles d'or s'attirer; on peut s'assurer d'ailleurs, en présentant à ces feuilles un bâton de verre frotté, que *a* est électrisé positivement et *b* négativement. Le phénomène était facile à prévoir, l'influence sur A a augmenté par suite du rapprochement des plateaux; elle a diminué sur B, parce que l'électricité du plateau C s'est portée vers le plateau A.

On rétablit les plateaux dans l'état primitif, et on introduit une lame épaisse d'un corps isolant entre les plateaux A et C; les lames d'or s'attirent de nouveau et l'on peut constater que la feuille *a* est encore positive et l'autre négative (1). L'interposition d'un corps mauvais conducteur produit donc le même effet que le rapprochement des plateaux et augmente l'influence électrique. Faraday appelle *pouvoir inducteur spécifique* d'un milieu isolant le rapport de la quantité d'électricité développée par influence à travers ce milieu, à la quantité d'électricité qui se produirait dans les mêmes conditions à travers une couche d'air de même épaisseur.

107. On peut dire aussi que l'influence électrique au travers d'une lame isolante s'exerce comme si cette lame était remplacée par une couche d'air moins épaisse. D'autre part, on a reconnu que l'influence électrique entre deux plateaux dont la distance est petite par rapport à leur diamètre, est à peu près en raison inverse de l'épaisseur de la couche d'air qui les sépare, et cette remarque permettra de déduire de l'expérience de Faraday une détermination expérimentale au moins très-approchée du pouvoir inducteur spécifique de la lame isolante. Supposons pour cela qu'après avoir interposé cette lame entre les plateaux A et C et constaté l'accroissement d'influence, on éloigne peu à peu le plateau A jusqu'à ce que les deux feuilles d'or *a* et *b* redeviennent

(1) Cette dernière précaution est nécessaire, parce que l'attraction des deux feuilles d'or prouve seulement qu'elles sont chargées d'électricités différentes. Faraday ne dit pas expressément qu'il s'est assuré de l'état électrique des feuilles, mais il est à présumer qu'il n'avait pas négligé ce soin ; cependant son expérience a été quelquefois interprétée dans un sens opposé, la plaque isolante était considérée, non comme augmentant, mais comme diminuant l'influence électrique.

verticales, c'est-à-dire que l'influence électrique soit de nouveau la même sur les plateaux A et B. Appelons E l'épaisseur de la lame isolante, n son pouvoir inducteur spécifique et e la quantité dont il a fallu reculer la lame A pour rétablir l'égalité d'influence de part et d'autre. On voit qu'en définitive on a remplacé une épaisseur d'air égale à E par une épaisseur d'air e et par la lame isolante qui équivaut à une couche d'air d'épaisseur n fois plus faible, ou $\frac{E}{n}$; ce qui donne l'équation

$$E = e + \frac{E}{n};$$

d'où l'on déduit

$$n = \frac{E}{E - e} = \frac{1}{1 - \frac{e}{E}}.$$

Le déplacement e étant toujours plus petit que l'épaisseur E de la lame isolante, cette expression donnera pour le pouvoir inducteur spécifique un nombre positif plus grand que l'unité.

108. **Des écrans électriques.** — Sans insister davantage pour le moment sur cette question des pouvoirs inducteurs qui joue un rôle important dans les phénomènes de condensation, il faut remarquer d'abord qu'il n'y a pas une distinction absolue à établir sous ce rapport entre les bons et les mauvais conducteurs. Ainsi, on peut répéter l'expérience que nous avons indiquée plus haut (105), en remplaçant le ballon de verre par une boule de métal de même diamètre soutenue à l'aide d'un manche bien isolant. Quand on introduit cette boule entre les deux plateaux, l'influence est encore augmentée et même l'accroissement de divergence est plus grand qu'avec le ballon de verre.

Ce phénomène s'explique sans difficulté quand le corps interposé est conducteur, parce que ce conducteur s'électrise aussi par influence et agit à son tour sur l'électroscope sans nuire beaucoup à l'action qu'exerçait primitivement le corps électrisé; on peut donc présumer que les corps mauvais conducteurs se comporteront jusqu'à un certain point de la même manière.

Toutefois, si le milieu interposé est conducteur et, au lieu d'être isolé, communique avec le sol, il agit alors comme un écran et

diminue beaucoup l'influence électrique qui pourrait s'exercer derrière lui. Un plateau conducteur communiquant avec le sol, substitué à la boule isolée, fait immédiatement retomber les feuilles d'or. De même, dans l'expérience d'Œpinus (82), il suffit de placer une lame conductrice non isolée entre la sphère influente et le cylindre pour ramener tous les pendules dans la verticale.

Ce résultat était facile à prévoir en remarquant que si la lame de métal est un peu étendue, elle n'a pas d'électricité sensible sur sa surface extérieure, la plus éloignée du corps influent. La résultante des actions exercées, par l'électricité influente et par l'électricité contraire de la lame, sur un point quelconque de cette lame et sur sa surface extérieure est nulle; si l'on s'éloigne toujours à partir de ce point, l'action doit varier d'une manière continue parce qu'on ne traverse pas de couche électrique, elle est donc aussi nulle dans la couche d'air voisine et reste insensible dans une certaine étendue derrière la lame.

Dans les idées de Faraday, cette expérience démontre que l'influence électrique (qu'il appelle *induction*) ne s'exerce pas à travers les conducteurs communiquant avec le sol. Cependant on ne peut pas comparer absolument les écrans électriques aux écrans opaques employés en optique, lesquels empêchent tout accès de la lumière dans l'intérieur du cône d'ombre géométrique, si l'on excepte les phénomènes de diffraction. Un écran électrique ne garantit de l'influence une certaine région que d'une manière approchée, et il n'est absolument efficace que lorsqu'il entoure complétement le corps électrisé. Dans ce cas, en effet, il annule toute action extérieure, comme on l'a vu dans les expériences précédentes de Faraday.

109. Enfin, ces considérations permettent d'expliquer certaines expériences qui ont paru contradictoires et dans lesquelles on a cru voir une diminution d'influence par suite de l'interposition d'un corps conducteur ou isolant. L'insuffisance de l'isolement ou bien la présence de conducteurs voisins non isolés, tels que le bras de l'opérateur, suffirait déjà pour produire un effet analogue. Mais lorsqu'une lame conductrice L, interposée entre un corps électrisé A (fig. 67) et un électroscope, est très-étendue, l'influence sur l'électroscope devient insensible. Cette lame se charge alors sur sa face supérieure d'une couche électrique plus

faible que celle du corps influent et de signe contraire ; une couche du même signe est distribuée sur la face inférieure et dans les parties éloignées. L'action que le corps A électrisé positivement par exemple, exerce sur l'électroscope est considérablement diminuée par l'électricité négative de la lame : l'électricité positive de cette lame agit peu parce qu'elle est très-éloignée, et la résultante peut être beaucoup plus faible que l'action primitive. Si la lame est très-étendue, le résultat est à peu près le même que si elle communiquait avec le sol. Une lame isolante se comportera de la même manière par les mêmes raisons et produira un rapprochement des pailles, comme l'ont constaté plusieurs physiciens ; mais Faraday, qui opérait avec des plateaux d'égales dimensions devait observer un accroissement d'influence.

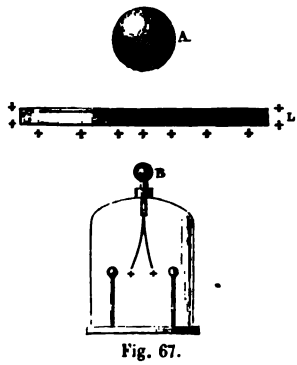


Fig. 67.

110. **Lignes de force de Faraday.** — On peut ainsi rendre compte d'une manière très-simple des expériences par lesquelles Faraday a essayé de démontrer que l'influence électrique (induction) à travers les corps mauvais conducteurs (diélectriques) peut s'exercer en lignes courbes.

Faraday place, par exemple (1), une demi-sphère de métal T (*fig.* 68), de 35 millimètres de diamètre, sur un cylindre de gomme laque S de 23 millimètres de diamètre et de 178 millimètres de longueur. La moitié supérieure du cylindre de gomme laque est frottée avec de la flanelle, puis la sphère T est mise en communication avec le sol et ensuite isolée. Faraday prend alors une balle conductrice portée par un manche isolant V et la place successivement dans les différentes positions indiquées par les lettres *a*, *d*, *c*, *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*. Dans chacune de ces positions la balle est d'abord mise en commu-

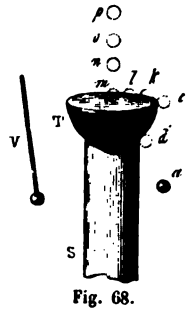


Fig. 68.

(1) *Experimental Researches*, vol. I, p. 383.

nication avec le sol, puis isolée et portée dans une balance de torsion dont la boule mobile a été chargée d'électricité positive, et on détermine la torsion nécessaire pour ramener la boule mobile à une distance déterminée. La balle a pris dans tous les cas de l'électricité positive, mais une quantité plus ou moins grande, suivant la position qu'elle occupait, comme on le voit par le tableau suivant :

POSITION DE LA BALLE	TORSION CORRESPONDANTE
c	112°
k	108
l	65
m	35
n	87
o	105
p	98

Lorsque la balle est placée en des points tels que *a*, *d*, *c*, on conçoit bien, d'après Faraday, que l'influence de la gomme laque électrisée puisse s'exercer sur cette balle, en ligne droite, mais il n'en serait plus de même pour d'autres points tels que *k*, *l*, *m*, situés derrière la demi-sphère de métal; l'influence ne pouvant s'exercer dans cette région qu'en contournant la calotte de métal doit s'affaiblir et, en effet, elle y diminue d'une manière très-rapide. Au contraire, à mesure qu'on s'élève au-dessus du point *m*, l'influence augmente de nouveau et atteint un maximum en *o* pour diminuer ensuite plus lentement.

Faraday arrive ainsi à cette conclusion que l'influence à distance s'effectue par l'intermédiaire du milieu isolant dont les molécules se polarisent, se joignent bout à bout par leurs pôles de noms contraires et se disposent suivant des lignes courbes, le long desquelles l'influence se propage de proche en proche. Ces lignes, que Faraday appelle *lignes de force*, peuvent aboutir à un corps conducteur, mais sans le traverser, s'il communique avec le sol; elles sont distribuées tout autour d'un corps électrisé, d'une manière plus ou moins régulière suivant la nature et la forme des corps voisins, et s'épanouissent ensuite

[illegible] mesure qu'elles s'éloignent. L'influence élec- [illegible] point du milieu isolant est d'autant plus énergique qu'il passe en ce point dans un élément de volume un plus grand nombre de lignes de force.

On pourrait faire diverses objections à cette idée théorique de Faraday en remarquant, par exemple, que la présence des molécules pondérables n'est nullement nécessaire à la production des phénomènes d'influence, puisque l'influence a lieu au travers d'un vase vide de gaz. Mais il suffit de montrer que les résultats de toutes les expériences analogues à la précédente s'expliquent tout aussi facilement par les actions à distance. Si la balle est restée en contact avec la demi-sphère non isolée, elle joue simplement le rôle d'un corps d'épreuve et donne la densité électrique qu'avait touché; cette densité doit varier en effet comme les derniers nombres du tableau. Si cette balle est placée dans le milieu isolant et mise en communication avec le sol, la quantité d'électricité dont elle se charge dépend de la différence des actions, au point qu'elle occupe, de l'électricité négative du cylindre de gomme laque et de l'électricité positive de la sphère; on voit aisément que, le long d'une verticale menée par le point [illegible], la résultante de ces deux actions ira d'abord en croissant, puis en diminuant d'une manière plus lente.

La notion des lignes de force n'est donc pas nécessaire pour expliquer les phénomènes d'influence, mais elle doit néanmoins être conservée, parce qu'elle peut servir à représenter d'une manière très-claire la distribution des actions électriques. En effet, la résultante des actions exercées en un point par un système quelconque de corps électrisés est tangente à la ligne de force qui passe en ce point. On conçoit, d'après cela, que toutes les lignes de force doivent émaner des corps électrisés normalement à leur surface s'ils sont conducteurs, et s'éloigner ensuite suivant une loi plus ou moins complexe. Nous reviendrons d'ailleurs sur cette question.

111. **Double influence.** — Un corps mauvais conducteur ne s'électrise pas par influence d'une manière instantanée, ou du moins la charge maximum n'est atteinte qu'au bout d'un temps plus ou moins long; il peut en résulter des phénomènes assez

Supposons, par exemple, qu'un corps électrisé positif A soit mis en présence de deux disques B et C placés l'un derrière l'autre; le premier est mauvais conducteur, le second bon conducteur et en contact avec le premier. Les deux disques sont électrisés de la même manière, négativement du côté du corps influent et positivement du côté opposé; la face du disque isolant qui touche le conducteur possède donc deux couches électriques de signes contraires dont l'un ou l'autre pourra prédominer.

Si l'influence a été de très-courte durée, l'électrisation propre du corps isolant sera très-faible; la face postérieure aura un excès d'électricité négative due au plateau conducteur, de sorte que les deux faces de ce disque seront toutes deux électrisées négativement : c'est là ce que M. Riess appelle la *double influence* (1).

Si, au contraire, l'influence a duré longtemps, le corps isolant aura atteint sa charge maximum, laquelle sera plus grande que celle du plateau conducteur. La face postérieure du disque isolant possède maintenant un excès d'électricité positive, de sorte que l'électrisation de ce disque se retrouve dans l'état ordinaire produit par la simple influence.

Ce phénomène signalé par M. Riess est une conséquence directe de ceux qui ont été déjà étudiés et il ne paraît pas nécessaire de le désigner par une dénomination particulière.

112. **Mouvements électriques produits par les pointes.** — Nous avons indiqué (72) la rotation du tourniquet électrique et expliqué ce phénomène par la répulsion que les molécules d'air électrisées qui constituent le vent électrique exercent par réaction sur la pointe elle-même. Remarquons d'abord que l'écoulement d'électricité qui a lieu par une pointe conductrice non isolée, en présence d'un corps influent, produit un vent électrique et une réaction absolument identiques à ce qui a lieu quand la pointe fait partie d'un conducteur électrisé. Ainsi, toutes les expériences de rotation du tourniquet électrique réussissent aussi bien quand cet appareil est mis en communication avec le sol et placé simplement dans le voisinage d'une machine électrique.

(1) *Pogg. Ann.*, t. CXXXI, p. 215. *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XIII, p. 190.

Plusieurs expériences paraissent confirmer cette explication de la rotation du tourniquet par la réaction de l'air ambiant. Ainsi, dans le vide, ou du moins dans les gaz très-rarifiés, le tourniquet ne tourne plus ; dans ce cas la perte d'électricité n'en existe pas moins, mais elle a lieu pour une charge plus faible et par tous les points de la surface du corps électrisé ; d'ailleurs, si elle se produit encore en plus grande abondance par les pointes, la résultante des réactions étant plus faible ne suffit pas à provoquer la rotation de l'appareil.

De même quand on met le tourniquet sous une cloche en verre bien isolante, il tourne rapidement d'abord, puis finit par s'arrêter presque complétement. La masse d'air environnante est alors limitée, toutes les molécules du gaz sont fortement électrisées et, si les pertes d'électricité par la surface de la cloche étaient annulées, le tourniquet ne tarderait pas à être à peu près dans le même état que s'il était placé dans l'intérieur d'un conducteur en communication avec lui ; la densité serait très-faible en tous les points de l'appareil et il n'y aurait ni vent électrique ni réaction. Si alors on pose la main sur la cloche, on produit par influence une nouvelle distribulion d'électricité dans le gaz, l'équilibre est détruit et le mouvement du tourniquet recommence, pour cesser de nouveau quand la main reste immobile, et reprendre une vitesse plus grande toutes les fois qu'on déplace la main.

Un milieu isolant autre que l'air doit produire le même effet. Ainsi Aimé [1] a constaté que le tourniquet tourne dans l'huile d'olive et ne tourne pas dans un liquide conducteur comme l'eau, parce qu'alors la communication d'électricité au milieu ambiant se fait par toute la surface. Masson indique même cette expérience comme un moyen commode de distinguer les liquides bons et mauvais conducteurs.

113. Le problème du tourniquet électrique a excité l'attention d'un grand nombre de physiciens [2] ; l'explication qui précède ne suffirait peut-être pas pour rendre compte de tous les phénomènes et il vaut mieux envisager la question à un autre point de vue, en s'appuyant sur le théorème suivant :

[1] *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. LXII, p. 421.

[2] Voir un historique très-détaillé de cette question par M. Tomlinson, *Phil. Mag.*, t. XXVII, p. 202.

Quand un conducteur électrisé A est mis en présence d'un système quelconque B de corps électrisés, la résultante des forces (1) *qui s'exercent sur le corps A est égale à la résultante des pressions électriques que ce corps exerce aux différents points de sa surface sur le milieu ambiant, si la déperdition est insensible.*

Cette proposition peut paraître évidente, mais il n'est pas inutile d'en donner la raison. La pression électrique sur un élément de surface $d\sigma$ du corps A est la résultante des actions qu'exercent sur la masse électrique $\mu d\sigma$, contenue dans cet élément, les masses électriques extérieures et celle du corps A lui-même. La résultante des pressions peut donc être considérée comme formée de deux parties : 1° la résultante des actions de toutes les masses extérieures sur tous les éléments électriques du corps A; 2° la résultante des actions qui s'exercent entre les différentes masses électriques répandues sur ce même corps. Or, cette seconde partie est nulle, parce que, s'il n'y a pas de déperdition, l'électricité peut être supposée adhérente à la surface du corps et toutes les forces qu'il s'agit de composer sont deux à deux égales et de signes contraires. La première partie représente évidemment l'action que les corps extérieurs exercent sur le corps proposé, ce qui démontre le théorème.

On peut dire aussi que la pression électrique sur un élément de surface diminue d'une certaine quantité la pression que le gaz ambiant exerce sur cette surface, et que la résultante des forces électriques qui agissent sur un corps est égale à la résultante des pressions du gaz ambiant ainsi modifiées.

Il suit de là que si un conducteur électrisé de forme quelconque, comme un tourniquet, est placé sur une pointe isolante et soustrait à toute action extérieure, ce conducteur ne pourra prendre aucun mouvement tant que, la déperdition étant négligeable, l'électricité pourra être considérée comme adhérente aux surfaces. Mais s'il y a, sur un élément de surface, une déperdition abondante d'électricité, la pression qui s'y produisait ne peut plus être appliquée au conducteur, l'équilibre sera rompu

(1) Nous supposons, pour simplifier le langage, que toutes les forces auxquelles est soumis le corps A ont une résultante; le théorème est également vrai si toutes ces forces ne sont pas réductibles à une résultante unique.

et l'élément considéré tendra à se mouvoir dans une direction opposée ; c'est le phénomène ordinaire du tourniquet électrique.

Au contraire, si un conducteur mobile électrisé est en communication avec d'autres corps électrisés ou soumis à des actions extérieures quelconques, les pressions électriques sur ce conducteur ne se feront pas équilibre en général. Ainsi un tourniquet électrique peut se mettre en mouvement, sans qu'il y ait de déperdition d'électricité, et les actions extérieures peuvent même être telles que la rotation ait lieu dans le sens de la direction des pointes. Toutefois une pareille rotation ne peut être continue parce qu'entre deux passages de l'appareil dans la même position, le travail des forces électriques serait nul (1). Si maintenant ce tourniquet éprouve une déperdition par les pointes, il pourra, ou bien gagner une position d'équilibre nouvelle en marchant dans un sens quelconque, ou bien prendre un mouvement continu de rotation en sens contraire de la direction des pointes, ce qui aura lieu le plus souvent.

On voit par là qu'en assimilant cet appareil au tourniquet hydraulique, on exagère l'analogie qui existe réellement entre les deux phénomènes, parce que les pressions obéissent dans les deux cas à des lois différentes.

114. Ces considérations permettent d'expliquer aisément les expériences suivantes de M. Neyreneuf. Un tourniquet, formé d'une seule aiguille terminée à l'une de ses extrémités par une boule et à l'autre par une pointe recourbée, est posé sur une pointe conductrice et placé au milieu d'un disque conducteur en communication avec une machine électrique ; ce tourniquet tourne alors à la manière ordinaire, c'est-à-dire en sens contraire de la pointe. Si le tourniquet occupe sur le disque une position excentrique, il peut ou rester en équilibre, ou marcher vers une position d'équilibre en se déplaçant dans un sens quelconque, ou prendre un mouvement de rotation continu en sens contraire de la direction de la pointe. En plaçant ce tourniquet non isolé en face d'un conducteur électrisé, on peut de même obtenir, ou une rotation continue dans le sens habituel, ou un déplacement d'un sens quelconque vers une position d'équilibre.

(1) Biot, *Traité de physique*, t. II, p. 324.

Si l'on garnit de boules de moelle de sureau les pointes d'un tourniquet ordinaire, l'instrument tourne dans le sens habituel, presque avec la même vitesse ; mais, avec des boules isolantes, la rotation est notablement ralentie et peut même, dans certains cas, avoir lieu en sens contraire. L'expérience du tourniquet, sous quelque forme qu'on l'ait reproduite, doit être expliquée de la même manière. Il ne peut y avoir de mouvement de rotation continu que s'il y a quelque part des fuites d'électricité, et le sens de la rotation dépend uniquement de la direction du vent électrique. Ce vent se produit d'ailleurs suivant la ligne de force, et il n'est pas nécessairement dans la direction de la pointe, comme on peut s'en assurer en opérant avec de l'électricité positive et observant dans l'obscurité la direction des aigrettes qui s'échappent de l'appareil.

115. M. Ruhmkorff a imaginé une sorte de tourniquet assez singulier, par lequel on peut montrer que le vent électrique n'est

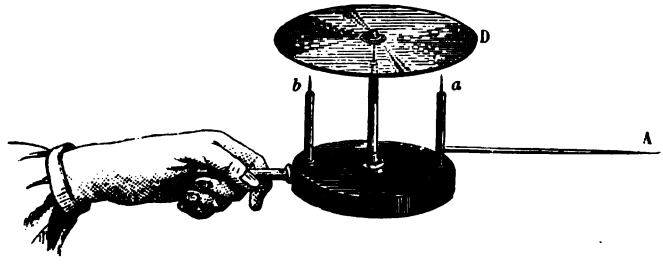


Fig. 69.

pas nécessairement dans la direction des pointes qui le produisent. Cet instrument se compose d'un disque de mica D (fig. 69) qui peut tourner sur une pointe verticale. Au dessous de ce disque et dans un même plan avec l'axe de rotation, sont disposées deux tiges de métal *a* et *b* terminées en pointe à la partie supérieure, et attachées sur un support de caoutchouc durci. Ces deux tiges communiquent séparément avec deux branches horizontales dont l'une A est effilée et l'autre arrondie.

Quant on tient cet appareil à la main par la branche arrondie et qu'on approche l'autre d'un corps électrisé, par exemple du milieu d'un conducteur de machine électrisée positivement, cette pointe A laisse échapper de l'électricité négative, la pointe

verticale correspondante *a* donne de l'électricité positive qui charge la lame de mica ; l'autre pointe verticale *b* donne de même de l'électricité négative. Si tout est symétrique par rapport au plan vertical des deux tiges, le disque de mica est en équilibre et, quand on lui donne un petit déplacement dans un sens quelconque, il continue de tourner avec une vitesse croissante. Mais si l'on approche l'appareil des extrémités du conducteur, ou si on le dirige de façon que le plan des tiges soit oblique au cylindre électrisé, l'électricité s'échappe des pointes verticales obliquement au plan de symétrie ; le disque se met de lui-même en mouvement dans un sens déterminé et il y revient au bout de quelque temps si on lui donne une rotation de sens contraire. Il est aisé de voir que les portions du disque voisines de la pointe *a* doivent s'éloigner du corps influent, ce qui est conforme à l'expérience.

116. Les propriétés des pointes peuvent modifier beaucoup les phénomènes d'attraction et de répulsion. Ainsi, quand on approche d'un corps électrisé un pendule en moelle de sureau formé d'un petit cylindre arrondi à l'un des bouts et effilé à l'autre extrémité, ce cylindre se précipite sur le corps électrisé en lui présentant son bout arrondi et se maintient ensuite en équilibre à une distance de quelques millimètres, la réaction produite à la pointe par le vent électrique faisant équilibre à la répulsion qui s'exerce au point le plus voisin.

Si, au contraire, on présente ce pendule au corps électrisé par sa pointe, il est repoussé, mais l'équilibre étant instable, le cylindre tourne ensuite sur lui-même et reprend la première position.

Franklin a réalisé une expérience analogue qu'il a appelée expérience du *poisson électrique* et qu'on a désignée ensuite sous le nom plus fantastique de *tombeau de Mahomet*. Quand on dispose des corps légers conducteurs, des fragments des feuilles d'or, par exemple, dans le voisinage d'un conducteur électrisé, comme une grande coupe métallique, on voit la plupart des fragments se précipiter sur le corps électrisé, être ensuite repoussés vers les corps voisins qui communiquent avec le sol, puis attirés de nouveau, de manière à exécuter des mouvements de va-et-vient à des distances parfois considérables. Mais on remarque

aussi que quelques-uns restent suspendus dans l'air, au-dessus et au-dessous du corps électrisé, et plusieurs latéralement.

Il en est qui tournoient sur eux-mêmes, d'autres qui s'approchent et s'éloignent alternativement de la coupe, sans jamais la toucher, comme un poisson du bord d'un bassin, ou bien tournent autour de la coupe en lui présentant toujours l'extrémité la plus grosse et en agitant l'autre comme une queue.

Franklin construisait ces petits poissons avec un morceau de feuille d'or taillée sous la forme de deux triangles isocèles opposés par leur base commune. Si les deux pointes ont le même angle et si le poisson est placé entre les deux plateaux qui servent à réaliser l'expérience des pantins électriques, le poisson se maintient à peu près à égale distance des plateaux. Quand les deux pointes sont inégales, la plus aiguë (la queue) est en bas, et la tête est en haut, plus proche du plateau supérieur.

On peut encore tenir par la queue un poisson pareil à longue queue et à tête très-courte, et l'abandonner dans le voisinage d'une boule électrisée, il part comme une anguille dans l'eau et va s'agiter à distance de la boule; si on le tient par la tête, la queue se retourne comme pour mordre la main.

La suspension d'une feuille d'or de cette forme dans une direction oblique à la verticale ne peut pas s'expliquer par les réactions d'un vent électrique supposé dans la direction de l'axe de la feuille, parce que ces réactions ne pourraient pas avoir une résultante verticale qui fasse équilibre à l'action de la pesanteur. On comprend d'ailleurs d'après la distribution des densités que les pressions sur tous les éléments de surface puissent se réduire à deux forces f et f' (fig. 70) appliquées aux extrémités B et C du poisson qui sont chargées d'électricités contraires, et donner une résultante verticale dirigée de bas en haut égale au poids de la feuille d'or.

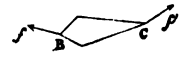


Fig. 70.

En réalité, le problème est très-complexe, et il n'offre d'ailleurs qu'un intérêt de curiosité.

117. Électrophore. — Nous terminerons ce chapitre de l'influence électrique par l'étude de l'électrophore qui en est l'une des applications les plus intéressantes. Wilke (1) avait déjà

(1) *Scripta Academiæ Suec. Scientiarum* (1762).

observé avec une lame de verre des phénomènes qui peuvent être considérés comme la véritable origine de cet instrument, mais Volta (1), sans avoir aucune connaissance des travaux de Wilke, obtint des effets plus énergiques en remplaçant la lame de verre par un gâteau de résine, et montra tout le profit qu'on pouvait tirer de cet appareil auquel il donna le nom d'*électrophore perpétuel*. L'électrophore de Volta se compose d'un disque de matière isolante (fig. 71) et d'un plateau conducteur porté par un manche de verre ou par des cordons de soie. On préparait autrefois le disque isolant en coulant dans un moule formé par une planchette entourée d'un cercle de fer, soit de la résine fondue, soit un mélange de résine, de térébenthine et de poix de Bourgogne, mélange qui permet d'obtenir une surface moins bulleuse et plus polie qu'avec la résine seule. Les gâteaux de résine ont l'inconvénient de se déformer au bout d'un certain temps sous l'influence des variations de température, et surtout de se fendiller, ce qui nuit beaucoup aux effets qu'on en peut obtenir.

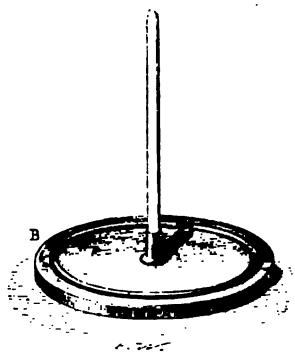


Fig. 71.

On remplace souvent les gâteaux de résine par un simple disque en caoutchouc durci. Cette substance donne en effet beaucoup d'électricité, peut-être plus que la résine, mais il arrive aussi que le caoutchouc durci se gondole et, en tout cas, la surface finit toujours par perdre presque complétement ses propriétés électriques, à cause de l'altération de la couche superficielle par les agents atmosphériques; le soufre qui a été introduit dans le caoutchouc, par exemple, donne des produits acides par l'action de l'oxygène de l'air. Quand un disque est dans cet état, on peut l'améliorer en le lavant avec de l'eau ordinaire ou une dissolution alcaline étendue, et frottant ensuite la surface énergiquement, mais il est difficile de restituer ainsi au caoutchouc ses propriétés primitives.

(1) *Collezione dell' opere di Volta, I, p.* 105.

Le plateau conducteur est habituellement en bois recouvert d'étain sur ses deux faces, et d'un diamètre un peu plus petit que le disque isolant.

Pour se servir de cet instrument, on électrise d'abord le gâteau de résine (ou le disque en caoutchouc durci) en le frottant ou mieux le frappant avec une peau de chat ; la surface se charge d'électricité négative et quelquefois en telle quantité qu'il se produit des crépitements et des étincelles quand on en approche la main. On applique le disque sur le gâteau et on le touche avec le doigt ; on obtient une étincelle et le disque se charge d'électricité positive par influence. On enlève le doigt et on soulève le disque par le manche isolant : l'électricité positive se répand régulièrement sur ce conducteur ; si on en approche le doigt, on en tire une étincelle qui a quelquefois 4 ou 5 centimètres de longueur (1). Le disque une fois déchargé, il suffit de le remettre sur le gâteau et de recommencer la même opération pour obtenir une nouvelle étincelle ; et l'on peut répéter la même expérience presque indéfiniment, sans avoir besoin de recharger le gâteau. Enfin, l'appareil peut être abandonné à lui-même, le disque étant placé sur le gâteau, et, au bout d'un temps assez long, plusieurs semaines ou même plusieurs mois, on le retrouve encore électrisé.

118. Les phénomènes électriques qui se produisent dans l'électrophore donnent lieu à des expériences très-variées.

Nous avons indiqué déjà (100) le jeu de cet instrument pour montrer que deux surfaces électrisées de sens contraire, dont l'une est isolante et l'autre conductrice, peuvent être mises en contact sans qu'il s'établisse entre elles de communication par étincelles. En effet, si l'on pose le plateau sur le disque isolant sans le mettre en communication avec le sol et qu'on l'enlève ensuite, ce plateau ne possède généralement pas d'électricité, ce qui doit être. Toutefois, si le gâteau vient d'être fortement électrisé et qu'on y pose le plateau pour l'enlever ensuite sans l'avoir touché, on le trouve chargé d'une petite quantité d'électricité positive et l'expérience peut même réussir plusieurs fois. Ce phénomène peut être expliqué de deux manières : si le plateau est très-

(1) Lichtenberg construisit un électrophore dont le gâteau avait 6 pieds de diamètre, le plateau 5 pieds, et il en tirait des étincelles de 14 à 16 doigts de longueur.

chargé, l'électricité négative qui se trouve à la partie supéri peut se perdre en petite quantité, soit par l'air soit par la t il n'est pas impossible, d'autre part, que la peau de chat qu fortement électrisée quand on frappe le gâteau, n'y laisse surface par décharge directe une petite couche d'électricité tive qui serait ensuite enlevée par le plateau conducteur ; avons vu des exemples de couches électriques différentes su posées et nous retrouverons un phénomène tout semblable l'électroscope condensateur.

Il n'y a pas en général d'étincelles directes entre l'électr négative du gâteau et l'électricité positive du plateau si les faces sont bien parallèles. Toutefois, lorsque le gâteau est tement électrisé, il se produit des décharges au moment où établit la communication avec le sol, surtout dans le voisi des bords du plateau. Pour le démontrer, il suffit, après a enlevé le plateau, de projeter sur la surface du disque iso un mélange de soufre et de minium, ou même une poi quelconque ; on voit se dessiner une multitude de points jau entourés de rayons plus ou moins abondants, puis par endr et surtout dans le voisinage des bords des taches plus larges des rayonnements plus étendus. Lichtenberg, qui a étudi phénomène avec des plaques isolantes de toute nature et toi sortes de poussières, décrit avec enthousiasme les appare dont il s'agit ici et compare le gâteau de résine à un firmam parsemé de constellations et illuminé par plusieurs soleils. observation digne de remarque, c'est que pour observer étoiles il faut projeter la poudre aussitôt après avoir enlev plateau, sans quoi les points électrisés positivement finissent disparaître, et l'électricité négative envahit le gâteau isolant toute son étendue. Il résulte de là que l'électrisation du gâ diminue peu à peu quand on se sert de l'instrument, au m tant qu'il est fortement chargé.

119. Si le plateau, une fois électrisé, était approché pa tranche de gâteau de résine, il se produirait une forte étinc et l'on peut ainsi obtenir, à l'aide des poudres de Lichtenb les figures les plus variées. En répétant plusieurs fois cette ex rience, on amènerait rapidement le gâteau à l'état neutre ; mai peut en profiter pour augmenter la charge d'un électrophore.

Supposons qu'on ait deux gâteaux de résine, l'un A faiblement chargé d'électricité négative, l'autre B à l'état neutre. Posant le plateau sur le disque A, on le charge d'électricité positive, puis on le pose par sa tranche sur le disque B où l'électricité se dépose par une étincelle. Plusieurs opérations semblables chargeront ce disque d'électricité positive en quantité suffisante pour qu'il puisse servir à son tour d'électrophore et donner de l'électricité négative au plateau, électricité que l'on reportera sur le disque A en y posant le plateau par la tranche. On arrive bientôt par ces décharges réciproques à donner aux deux instruments la plus grande quantité d'électricité qu'ils puissent garder.

Le moule dans lequel est coulé le gâteau de résine intervient aussi dans le phénomène, comme il est facile de le montrer. Ce moule étant isolé et en communication avec un électroscope à feuilles d'or, on frotte le gâteau avec une peau de chat, les pailles divergent énergiquement et sont chargées d'électricité négative. Après avoir touché le moule de manière à ramener les pailles à l'état neutre, on pose le plateau sur le gâteau ; les pailles divergent de nouveau et sont positives. On touche le moule, puis le plateau : les pailles divergent encore et sont toujours positives. On les ramène de nouveau au contact et on enlève le plateau : nouvelle divergence des pailles qui sont chargées cette fois d'électricité négative. Pendant le jeu de l'électrophore, le moule est donc le siége de mouvements électriques considérables, dont il est facile d'expliquer le détail, et l'on peut remarquer que si le moule restait isolé, l'électricité positive qui se manifeste à sa surface quand on applique le plateau sur la résine nuirait à l'influence qui s'exerce sur le plateau ; cette observation suffit pour montrer qu'il est utile de maintenir le moule en communication avec le sol. Ce moule joue sans doute un autre rôle : l'électricité positive dont il est chargé par influence attire l'électricité négative du gâteau vers la partie inférieure et tend à la faire pénétrer plus profondément dans la résine, ce qui contribue à diminuer la déperdition par la surface ; cette circonstance intervient peut-être pour une part dans la propriété que possède l'électrophore de garder pendant un temps si long l'électricité dont il a été chargé.

CONDENSATION ÉLECTRIQUE.

120. **Des sources d'électricité.** — Les machines électriques se composent habituellement d'un corps mauvais conducteur, sur lequel l'électricité est produite par frottement, et d'un conducteur métallique qui s'électrise soit par influence à distance, soit plus directement par des étincelles qui se manifestent entre le conducteur et le corps frotté. En tout cas, de quelque manière que fonctionne une machine électrique ou un appareil quelconque producteur d'électricité, il est facile de constater que le conducteur électrisé par cette machine ne peut pas se charger sans limite; si on ne communique pas à des corps étrangers l'électricité produite à chaque instant, il arrive bientôt que, par suite des réactions qui ont lieu entre les différentes parties de l'appareil, et des déperditions continuelles par l'air et les supports, la machine cesse de produire ou du moins ne suffit plus qu'à réparer ses pertes : alors le conducteur de la machine a atteint une charge maximum. Établissons maintenant une communication par une tige de métal entre la machine et un autre conducteur isolé, ce nouveau conducteur s'électrise à son tour, mais ne tardera pas à atteindre aussi un état limite; l'équilibre aura lieu de nouveau, au bout d'un temps plus ou moins long, lorsque la répulsion exercée par ce nouveau conducteur sur une molécule de fluide électrique située sur la tige de communication sera égale à la répulsion que la même molécule éprouve de la part de la machine, laquelle est limitée comme nous venons de le voir. La quantité d'électricité empruntée à la machine par le fait de cette communication dépend d'ailleurs des dimensions du conducteur employé.

La dénomination de *source électrique* appliquée à un appareil quelconque producteur d'électricité indique bien l'analogie qui existe entre ces appareils et les sources d'eau naturelles, dont la production est aussi indéfinie, lorsque le liquide peut s'écouler d'une manière permanente, mais qui ne pourraient, dans un tube vertical ou dans un bassin sans issue, élever l'eau à un niveau supérieur à celui des nappes souterraines qui les ali-

nentent. L'analogie paraîtra plus intime encore quand nous aurons précisé davantage le rôle des machines électriques.

121. **Principe de la condensation électrique.** — Quoi qu'il en soit, avec une source donnée d'électricité, on peut accumuler sur un conducteur, en profitant des phénomènes d'influence, une quantité d'électricité plus grande que si ce conducteur était simplement mis en communication avec la source et soustrait à l'influence de tous conducteurs étrangers : c'est là ce qui constitue le phénomène de la *condensation électrique*.

Quelques considérations élémentaires suffiront pour expliquer le jeu de la condensation. Supposons qu'une source d'électricité positive S (fig. 72) soit mise en communication par un fil de métal avec un conducteur A ; l'équilibre sera atteint lorsque la charge du conducteur A sera assez grande pour exercer sur

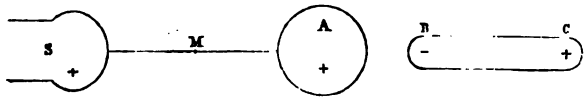


Fig. 72.

une molécule électrique M du fil de communication une répulsion égale à celle de la machine ; cette molécule restera en place et ne pourra plus affluer vers le conducteur ni retourner à la source.

Supprimons maintenant le fil de communication et approchons de la sphère A un conducteur isolé, un cylindre BC, par exemple. Ce cylindre se charge, par influence, d'électricité négative dans sa partie antérieure et d'électricité positive en arrière ; en même temps, la distribution se modifie sur le conducteur A, et l'électricité positive dont il est chargé se rapproche du cylindre voisin. Dans ces conditions, si l'on rétablit la communication de ce conducteur avec la source, il est clair que l'équilibre n'existe plus : la répulsion exercée par la source sur la molécule M n'a pas changé, mais la répulsion du conducteur A a diminué, puisque l'électricité s'est éloignée, et de plus la molécule M éprouve une attraction de la part du cylindre, puisque l'électricité négative de ce dernier agit à une distance moindre que l'électricité positive. Cette molécule positive M va donc cheminer vers le conducteur A et augmenter sa charge. En laissant les

choses dans cet état, il s'établira au bout de quelque temps un nouvel état d'équilibre, lorsque la répulsion exercée par la machine sur une molécule positive en M sera égale à l'excès de la répulsion des électricités positives du conducteur A et de l'extrémité C du cylindre, sur l'attraction de l'électricité négative qui est en B.

Supprimons de nouveau la communication du conducteur A avec la source et mettons le cylindre B en communication avec le sol : l'électricité positive de ce cylindre disparaît, son électricité négative augmente et un nouveau changement de distribution a lieu sur A. Supprimons la communication du cylindre avec le sol et rétablissons celle du conducteur A avec la source, l'équilibre sera rompu de nouveau et ce conducteur recevra une nouvelle charge.

On peut répéter la même manœuvre plusieurs fois et, à chaque opération, la charge du conducteur augmente. Enfin, si l'on relie d'une manière permanente le cylindre avec le sol et le conducteur A avec la source, ce dernier atteindra sa charge maximum quand la résultante des forces exercées sur une molécule M sera encore nulle.

122. On met ces effets successifs en évidence en se servant de deux plateaux métalliques A et B (fig. 73) portés par des pieds en verre et munis de pendules conducteurs *a* et *b*. Le plateau B étant éloigné, on met A en communication avec une machine électrique et le pendule *a* atteint bientôt un écart maximum. On supprime cette communication et on approche le plateau B : le pendule *a* s'abaisse et le pendule *b* s'élève, mais un peu moins.

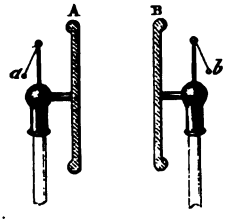


Fig. 73.

Rétablissant la communication du plateau A avec la machine, on voit le pendule *a* reprendre son écart primitif, et la divergence du pendule *b* augmente encore. On supprime la communication avec la machine et on touche B, le pendule *b* retombe et le pendule *a* s'abaisse. On peut enlever le doigt et répéter la même opération plusieurs fois.

Enfin, si l'on maintient la communication du plateau A avec la source et celle du plateau B avec le sol, le pendule *b* reste

rtical et le pendule *a* reprend peu à peu son premier écarte-ent ; l'équilibre est alors atteint. Le plateau A a pris, sous l'in-uence du plateau B, une charge électrique beaucoup plus rande que s'il eût été mis en communication avec la source et oigné de tout conducteur étranger ; on peut dire que l'électri-ité de la source a été condensée sur ce plateau.

123. **Des électricités dissimulées.** — Les deux plateaux A et B ont ainsi chargés sur les surfaces intérieures de deux couches relativement très-épaisses d'électricités différentes dont les actions sur un point extérieur sont de signes contraires et ne donnent qu'une résultante très-faible. On dit quelquefois que l'électricité du plateau B est entièrement *dissimulée* par celle du plateau A, et qu'une partie de celle-ci est de même *dissimulée* par celle du plateau B. Cela veut dire que sur un point du conducteur B et du corps qui le met en relation avec le sol, l'action du plateau A est égale et de signe contraire à celle du plateau B, ce qui donne une résultante nulle ; et, d'autre part, que l'action du plateau A sur une molécule située sur ce conducteur est diminuée de celle du plateau B : elle est la même que celle d'une couche égale à celle qui s'y serait produite sans l'influence du plateau B, le reste étant pour ainsi dire annulé. On remarque, en effet, que lorsque le plateau A est chargé à refus par la source, la divergence du pendule *a* est la même, qu'il soit soumis ou non à l'influence du plateau B.

Si l'expression *électricité dissimulée* n'a d'autre but que de rappeler cette compensation plus ou moins complète des actions, elle n'a d'autre inconvénient que d'être inutile ; mais on commettrait une grave erreur si l'on voulait désigner par là un état particulier d'électricité qui serait soustraite à quelqu'une des lois habituelles. Les actions des deux couches électriques sur un point électrisé placé entre les deux plateaux sont de même sens et s'ajoutent, sans qu'il y ait alors aucune dissimulation ; si l'on applique un plan d'épreuve sur la surface interne de l'un des plateaux, ce plan d'épreuve y prendra, comme d'habitude, une charge proportionnelle à celle du point touché.

124. **Force condensante.** — On voit qu'en définitive, un appareil à condensation électrique se compose de deux conducteurs A et B, dont l'un A est mis en communication avec la source et

dont l'autre B peut être mis en communication avec le sol o maintenu isolé, ces deux conducteurs étant séparés par un m lieu isolant.

L'ensemble de l'appareil s'appelle un *condensateur* dont l deux conducteurs sont les *armatures;* l'armature A qui co munique avec la source est le *collecteur* et l'autre B le *cond seur*.

On appelle *force condensante* le rapport qui existe entre charge totale que prend le collecteur chargé à refus par la sou sous l'influence du condenseur, à la charge qu'il prendrai le condenseur n'existait pas. Ce rapport dépend de la for des dimensions et de la distance des armatures et est indé dant de la source employée.

Sans qu'il soit nécessaire de faire aucun calcul, on con que la force condensante augmentera avec l'influence exe sur le condenseur; elle sera d'autant plus grande que les ar tures seront plus rapprochées, et la forme de surfaces parallè comme des plateaux, est celle qui doit convenir le mieux.

125. **Condensateur à lame isolante solide.** — Dans les d exemples précédents, le milieu isolant interposé entre les ar tures était simplement une couche d'air; mais, si la source puissante et si les armatures ne sont pas très-éloignées, deux couches électriques qui sont placées en regard l'un l'autre ne tardent pas à produire une étincelle et à décha ainsi l'appareil spontanément. On évite cet inconvénient remplaçant la couche d'air par un milieu isolant solide, qu'une lame de verre, qui offre au passage de l'étincelle résistance beaucoup plus considérable.

Le condensateur à plateaux qui sert en général pour dém trer le phénomène et en étudier les lois se compose de d plateaux métalliques à bords arrondis A et B (fig. 74), muni pendules conducteurs *a* et *b* et isolés par des pieds en verre. pieds des plateaux sont portés sur des coulisses munie crémaillères qui permettent de les rapprocher ou de les éloi à volonté. Entre les plateaux, au-dessus du pignon qui c mande les crémaillères, est une lame de verre C posée s sur un pied isolant. Pour répéter les expériences que n venons d'indiquer, il vaut mieux laisser la lame de verr

qui permet de rapprocher davantage les plateaux et d'opérer avec de plus grandes charges.

Toutefois, les lames solides ainsi interposées entre les armatures d'un condensateur, jouent un rôle un peu plus complexe qu'un simple isolement ; nous avons déjà vu (106) qu'elles ont un

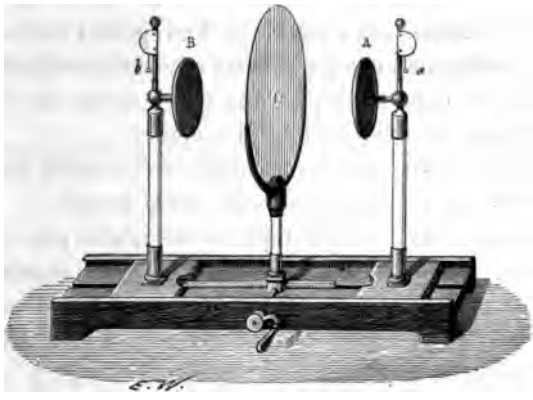


Fig. 74.

pouvoir inducteur spécifique plus grand que l'air, c'est-à-dire qu'elles augmentent les phénomènes d'influence ; pour la même raison, elles augmentent aussi la force condensante.

126. **Décharge lente d'un condensateur.** — Lorsque le collecteur A d'un condensateur est chargé par une machine, le condenseur B communiquant avec le sol, le pendule *a* du collecteur diverge seul et le pendule *b* du condenseur reste vertical. Si l'on supprime les communications, le pendule *a* baisse peu à peu par suite des déperditions ; une partie de l'électricité du condenseur B quitte la face interne et se distribue à l'extérieur où elle fait diverger le pendule *b*. Au bout de quelques instants les deux pendules auront la même divergence (*fig.* 75), les pertes seront les mêmes de part et d'autre et, à partir de ce moment, les pendules baisseront tous deux d'une manière régulière jusqu'à ce que l'appareil soit complétement déchargé ; cette décharge spontanée est en général très-lente.

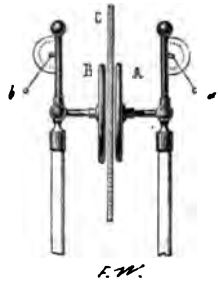


Fig. 75.

Si, après avoir chargé l'appareil et supprimé les communications, on touche le collecteur A avec la main, on reçoit une petite étincelle ; aussitôt le pendule a redevient vertical et le pendule b diverge brusquement. Le jeu de l'appareil est alors interverti, le plateau B joue cette fois le rôle de collecteur et le plateau A est condenseur. On enlève alors la main et on touche le plateau B, le pendule b s'abaisse et a se relève. En répétant les mêmes opérations, on enlèvera à chaque contact une certaine quantité d'électricité à l'un ou l'autre des plateaux et il faudrait un temps très-long, pour amener l'appareil à l'état neutre.

La loi de décroissement des quantités d'électricité par *décharges alternatives* est d'ailleurs extrêmement simple.

Supposons les plateaux identiques et désignons par a la charge du collecteur après qu'on a supprimé la communication avec la machine, le condenseur B étant relié au sol prend une charge $-b$ d'électricité contraire et cette charge est plus faible puisqu'elle est un effet d'influence.

On peut écrire

$$b = ma,$$

m étant un coefficient plus petit que l'unité dont la valeur dépend de la forme et de la distance des plateaux. Ce coefficient ne dépend pas des charges, car si, l'équilibre étant atteint, on double la densité électrique en chaque point, on obtiendra un nouvel état d'équilibre et le rapport des charges des plateaux ne sera pas modifié.

Isolons maintenant le plateau B et mettons le plateau A en communication avec le sol, le plateau B, agissant cette fois comme corps influent, maintiendra sur le plateau A une charge a' donnée aussi par la condition

$$a' = mb = m^2 a$$

et la quantité d'électricité positive qui a disparu sous forme d'étincelle par ce contact est

$$a - a' = a - mb = a - m^2 a = a(1 - m^2).$$

En isolant de nouveau A et touchant B, il resterait sur ce der-

mier plateau une charge

$$ma' = m^2 b = m^3 a,$$

et l'on aurait enlevé

$$b(1 - m^2) = am(1 - m^2).$$

Le tableau suivant indique les charges qui restent successivement sur les deux plateaux et celles qu'on enlève par chacun des contacts.

ORDRE DES CONTACTS	PLATEAU B		PLATEAU A	
	CHARGE	PERTE	CHARGE	PERTE
0	a	»	$b = ma$	»
1	$mb = am^2$	$a(1 - m^2)$	»	»
2	»	»	bm^2	$b(1 - m^2)$
3	am^4	$am^2(1 - m^2)$	»	»
4	»	»	bm^4	$bm^2(1 - m^2)$
5	am^6	$am^4(1 - m^2)$	»	»

On voit que les charges successives et les pertes des plateaux forment des progressions géométriques décroissantes dont la raison est m^2, et il faudrait d'après ce calcul un nombre infini de contacts pour que les armatures fussent revenues à l'état neutre.

127. **Décharge brusque. Résidus.** — Les deux armatures d'un condensateur étant isolées, si on les réunit avec un *excitateur électrique*, formé de deux arcs de métal articulés à charnière et portés par des manches isolants, on obtient une étincelle très-puissante et l'appareil est presque entièrement déchargé. Si le condensateur est à lame d'air, cette *décharge brusque* n'y laisse plus que l'excès $a - b$ de l'électricité du collecteur sur celle du condenseur, excès qui se distribue régulièrement sur l'ensemble des deux plateaux; mais si la couche isolante est formée par une lame de verre, de résine, de soufre, etc., et si, au bout de quelques instants, on réunit de nouveau les armatures par l'excitateur, on obtient une nouvelle étincelle plus faible que la

première ; on en pourra obtenir ensuite une troisième, puis une quatrième, etc., et l'intensité de ces étincelles de résidus diminue de plus en plus.

Ce phénomène est une conséquence de la pénétration lente de l'électricité dans les corps isolants (104). Lorsque le condensateur est chargé, la densité électrique sur la face intérieure de chaque armature est très-grande, les couches électriques des armatures passent donc sur la lame isolante et y pénètrent à une certaine profondeur. Quand on décharge l'appareil, les couches électriques superficielles peuvent quitter la lame isolante et passer sur les armatures correspondantes ; mais les couches profondes ne se déplacent pas brusquement, elles reviennent peu à peu vers les armatures et peuvent fournir une nouvelle étincelle.

On démontre d'ailleurs par le condensateur à lame de verre (*fig.* 74) que les couches électriques quittent les plateaux et s'appliquent sur la lame de verre. Cet appareil étant chargé lorsque les plateaux sont en contact avec la lame de verre, on supprime les communications, puis on écarte les plateaux à l'aide de la crémaillère et, les touchant alternativement ou ensemble, on constate qu'ils sont faiblement électrisés ; il suffit de les rapprocher au contact et de les réunir par un excitateur, pour obtenir une étincelle puissante.

On peut récolter l'électricité qui se trouve sur la lame isolante par tout autre moyen que les plateaux primitifs. Si, après avoir chargé le condensateur et écarté les plateaux, on applique une main sur l'une des faces de la lame de verre, on entend un petit crépitement, et l'effet devient plus manifeste si en même temps on promène sur la face opposée un doigt de l'autre main ; il se produit ainsi des décharges partielles à chacun des points qui sont successivement touchés par le doigt. L'expérience ne présente aucun inconvénient quand on opère dans ces conditions, mais si l'on appliquait en même temps les deux mains sur les deux faces de la lame de verre, elles feraient fonction d'armatures complètes et on éprouverait une secousse aussi désagréable que si l'on avait touché en même temps les deux plateaux du condensateur chargé.

128. Les plateaux du condensateur sont situés par rapport à la lame isolante comme le disque d'un électrophore sur un

gâteau de résine, et doivent donner lieu à des phénomènes analogues. En effet, si, après avoir tiré d'un condensateur à plateaux 4 ou 5 décharges alternatives, on éloigne le plateau collecteur A que l'on vient de toucher, on le trouve chargé, non pas d'électricité positive, comme cela aurait eu lieu tout d'abord, mais d'électricité négative. La couche électrique positive déposée par le collecteur sur la lame isolante a été affaiblie par les premières décharges alternatives et ne revient pas sur l'armature quand celle-ci est mise en communication avec le sol, l'autre étant isolée ; il se produit alors sur cette armature de l'électricité de nom contraire par suite de l'excès d'influence de la couche la plus proche.

Ces phénomènes accessoires du condensateur à lame d'air ont été signalés par M. Crahay (1) et étudiés avec soin par M. Neyreneuf (2) ; ils s'expliquent d'une manière très-simple par les propriétés générales des corps médiocres conducteurs et n'interviennent que pour une faible part dans les applications.

129. **Découverte de la condensation. — Bouteille de Leyde.** — La condensation électrique a été observée avant la découverte de l'influence, et par conséquent à une époque où l'explication du phénomène ne pouvait pas être donnée d'une manière satisfaisante ; la première observation paraît devoir être rapportée à von Kleist, évêque de Poméranie (3).

En 1745, von Kleist planta une tige de fer dans le bouchon d'une bouteille qui renfermait du mercure et, tenant cette bouteille à la main, il mit la tige en contact avec le conducteur d'une machine électrique. Il toucha par hasard ce conducteur de l'autre main et reçut dans le bras et dans le coude une violente commotion.

La même expérience fut faite l'année suivante dans des conditions presque identiques par Cuneus et Musschenbroek à Leyde. Ces physiciens, observant que les corps électrisés perdent rapidement leurs propriétés électriques et attribuant cette déperdition à l'existence de particules conductrices dans l'air, eurent l'idée d'électriser un conducteur entièrement renfermé dans une en-

(1) *Journal l'Institut.* T. VII, p. 409.
(2) *Journal de Physique.* T. I, p. 62.
(3) *Versuche u. Abh. d. naturf. Gesellsch.* Dantzig. T. II, p. 408.

veloppe formée d'un corps solide isolant, espérant que la charge électrique serait plus grande et se conserverait plus longtemps; ils mirent pour cela de l'eau dans des bouteilles de verre et l'électrisèrent à l'aide d'une chaîne de métal qui pendait du conducteur d'une machine et plongeait dans le liquide. L'expérience ne leur donna pas à ce point de vue de résultats bien satisfaisants ; mais un jour l'un d'eux, tenant la bouteille d'une main et la croyant suffisamment chargée, voulut détacher la chaîne de l'autre main ; il se sentit frappé dans les bras et dans la poitrine d'un coup violent.

Musschenbroek répéta cette expérience avec un vase de verre très-mince ; il se sentit secoué dans les bras, les épaules et la poitrine, au point d'en perdre la respiration, et fut plusieurs jours avant de revenir de sa frayeur. Dans une lettre adressée à Réaumur et restée célèbre parce qu'elle a été l'annonce de cette découverte mémorable (1), Musschenbroek dit qu'il fut ébranlé par cette secousse d'une manière terrible et crut que c'était fait de lui. Toutefois la surprise causée par une sensation si inattendue en fit singulièrement exagérer les effets, et bientôt après, l'*expérience de Leyde*, comme l'a appelée l'abbé Nollet, devint un jeu pour tous les électriciens.

On remarqua bientôt que la secousse est plus énergique quand on prend la bouteille à pleine main au lieu de la tenir seulement par les doigts sur une partie de sa surface ; on remplaça l'eau par un liquide quelconque, ou par de la grenaille de plomb ou par une feuille d'étain collée à l'intérieur et communiquant avec une tige de métal qui traversait le bouchon ; enfin on recouvrit aussi la surface extérieure par une feuille d'étain qui ne laissait à nu que la partie voisine du col. Cette disposition imaginée par le docteur Bevis est encore celle qu'on emploie aujourd'hui.

On voit, d'après tout ce qui précède, que la *bouteille de Leyde* ou *jarre électrique* est un condensateur dont les armatures sont le liquide et la main de l'opérateur, ou bien les deux feuilles d'étain, et dont le corps isolant est la lame de verre. Franklin fit beaucoup d'expériences avec cet appareil dont il donna une

(1) *Mémoires de l'Académie* (1746), p. 2.

explication par la théorie d'un seul fluide. Il imagina aussi le carreau fulminant qui n'est autre chose qu'un condensateur à lame de verre, et quelques années plus tard Œpinus et Wilke construisirent le condensateur à lame d'air. La véritable explication de la condensation semble avoir été donnée pour la première fois par Volta en 1782.

130. La bouteille de Leyde est la forme de condensateur la plus commode pour les expériences et celle qui donne les effets les plus énergiques. L'une des armatures, l'extérieure, est toujours formée par une feuille d'étain collée sur toute la surface jusqu'à la naissance du col. Si l'ouverture du col est assez grande pour qu'on y puisse introduire la main ou une petite brosse articulée, on colle aussi des lames d'étain sur toute la surface intérieure et on les fait communiquer avec une tige de métal plantée dans le bouchon du flacon, soit par une chaîne métallique, soit plutôt par des tiges de laiton recourbées qui font ressort et s'appuient sur la surface intérieure : on obtient ainsi une communication plus continue. On se contente quelquefois d'emplir la bouteille de feuilles d'étain chiffonnées ou de feuilles de clinquant, mais cette disposition n'est pas bonne, à moins que les feuilles métalliques ne soient fortement tassées dans la bouteille.

Le col de la bouteille est couvert d'un vernis à la gomme laque ou d'une couche de cire d'Espagne, pour rendre l'isolement du verre plus parfait et empêcher que des étincelles ne se produisent spontanément entre les deux armatures en suivant la surface du verre.

La force condensante d'une bouteille est d'autant plus grande que le verre est plus mince, mais on ne peut pas exagérer cette qualité, parce que les bouteilles sont bientôt traversées par la décharge électrique qui se produit d'une armature à l'autre en perçant le verre. L'épaisseur du verre doit donc être assez grande pour que la décharge spontanée, s'il arrive que la bouteille soit trop chargée, se produise plutôt de la tige supérieure à l'armature extérieure en longeant la surface du verre.

Il est important que l'épaisseur du verre soit à peu près uniforme et qu'il n'y ait pas de parties bulleuses, sans quoi il se produit des décharges aux endroits où la résistance est plus faible et la bouteille est percée. La nature du verre a aussi une

grande influence ; certains verres sont un peu conducteurs, de sorte que l'électricité y pénètre à une certaine profondeur, et une partie notable ne disparaît pas à la première décharge ; on obtient alors des étincelles de résidus très-nombreuses. Comme l'efficacité d'un condensateur doit être évaluée, non par la quantité d'électricité qu'il peut accumuler, mais par celle qu'on dépense en le déchargeant, on voit que les étincelles résiduelles ne sont qu'un inconvénient. Il faut donc choisir les verres les plus homogènes et qui donnent le moins de résidus après la première décharge.

131. La bouteille de Leyde permet de vérifier aisément plusieurs propriétés générales des condensateurs.

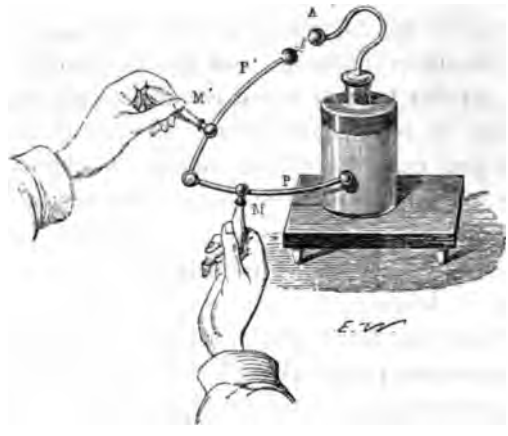


Fig. 76.

Une bouteille étant chargée et posée sur un support isolant, on touche l'armature extérieure avec une des branches d'un excitateur et on approche l'autre branche de l'armature intérieure (fig. 76). Quand la distance est assez faible il se produit une forte étincelle. Si l'on abandonne ensuite la bouteille et si au bout de quelques instants on recommence l'expérience, on obtient une nouvelle étincelle plus faible, et ainsi de suite. Ces étincelles de résidus sont souvent très-nombreuses.

Pour répéter l'expérience des décharges alternatives d'un condensateur, on pose une bouteille chargée sur un support isolant (fig. 77) et on fait communiquer ses deux armatures avec deux

électroscopes isolés *a* et *b*. En touchant alternativement les deux armatures, on enlève à chaque contact une petite quantité d'électricité, l'électroscope de l'armature touchée devient vertical, l'autre diverge et l'on peut obtenir un très-grand nombre de décharges alternatives sans que les effets cessent d'être manifestes.

Fig. 77.

Si alors on réunit les deux armatures par un excitateur on obtient encore une étincelle très-apparente.

On peut de même, en traçant des caractères sur un gâteau isolant avec les deux armatures d'une bouteille, montrer par les figures de Lichtenberg que ces armatures sont chargées d'électricités différentes.

Fig. 78.

Franklin a imaginé de construire une bouteille à armatures mobiles par laquelle on démontre que l'électricité se porte sur la lame isolante. Cette bouteille se compose d'un vase en verre conique C (fig. 78) que l'on pose dans un vase B en métal, et dans lequel on met un autre vase métallique A, muni d'une tige terminée par un crochet. On charge cette bouteille à la manière ordinaire, puis on la pose sur une tablette isolée. On enlève l'ar-

mature intérieure A, puis le vase de verre et, touchant les deux armatures, on n'obtient que des traces d'électricité. Il suffit de recomposer la bouteille et de réunir les armatures par un excitateur pour produire une forte étincelle. On pourrait, de même que pour le condensateur à plateaux, décharger le verre par les deux mains après avoir décomposé la bouteille.

Ce qui caractérise surtout les bouteilles de Leyde, c'est que l'une des armatures de cette forme de condensateur est entourée presque complétement par l'autre. Si donc l'armature intérieure communique avec une source d'électricité, il résulte du théorème de Faraday (90) que l'armature extérieure communiquant avec le sol se charge d'une quantité égale d'électricité contraire. Franklin démontra cette propriété à laquelle il était conduit par la théorie d'un seul fluide, en posant sur un corps isolant une bouteille chargée et réunissant les deux armatures d'une manière permanente par un arc conducteur; on ne trouve plus alors aucune trace d'électricité sur ces armatures.

132. **Batteries électriques.** — La quantité d'électricité dont se charge une bouteille de Leyde est, pour une même épaisseur de

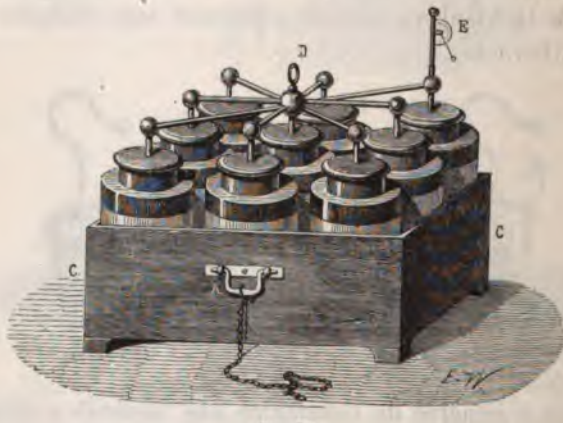


Fig. 79.

verre, proportionnelle à l'étendue des armatures; mais il est difficile de se procurer des vases en verre de grandes dimensions dont l'épaisseur soit assez uniforme et même alors ces vases sont incommodes à manier. Quand on veut obtenir des étincelles puissantes, on rassemble plusieurs jarres électriques, formées

de bocaux cylindriques, dans une caisse en bois dont l'intérieur est tapissé d'une feuille d'étain, et l'on réunit par des tringles de métal toutes les armatures intérieures, comme on le voit figure 79. Toutes les armatures extérieures communiquent par la garniture de la boîte avec une poignée A que l'on peut relier avec le sol par une chaîne. Cet ensemble de bouteilles qu'on appelle une *batterie* se comporte comme une bouteille unique dont la surface totale serait égale à la somme des surfaces des bouteilles qui constituent la batterie. On voit que, pour un même volume, la surface est notablement plus grande qu'avec une seule bouteille et l'appareil est beaucoup plus facile à construire et à remplacer. On adapte souvent aux batteries électriques un électromètre à cadran E qui indique à peu près les progrès de l'accumulation d'électricité et permet d'éviter les trop grandes charges qui risqueraient de percer les bocaux.

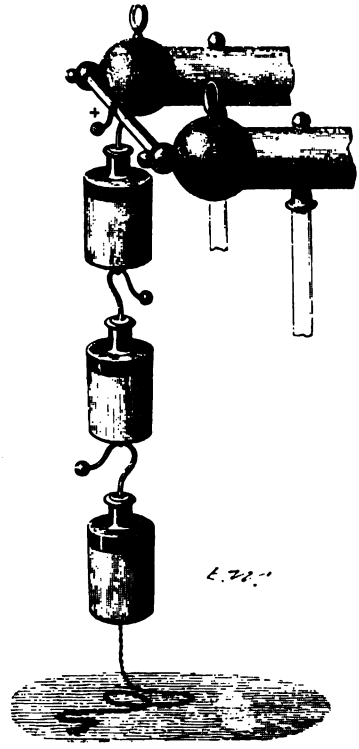


Fig. 80.

133. Franklin a imaginé aussi une autre forme de batterie, qu'on a appelée une disposition de condensateurs en *cascade*. Supposons qu'on ait des bouteilles munies d'un crochet à la partie inférieure, de façon qu'on puisse les attacher les unes aux autres comme l'indique la figure 80, l'armature intérieure de la première bouteille communiquant avec la machine, l'armature extérieure de cette bouteille avec l'armature intérieure de la suivante, et de même pour toutes les autres jusqu'à la dernière, dont l'armature extérieure communique avec le sol. Si la première bouteille reçoit de la source une quantité d'électricité $+a$, l'armature extérieure prend une charge négative $-ma$ qui en

diffère extrêmement peu, et l'armature intérieure de la suivante une charge égale $+ ma$; en continuant le même raisonnement, on voit que la dernière bouteille, la n^e, possède sur l'armature intérieure une charge égale à am^{n-1} et sur l'armature extérieure $-am^n$.

On peut décharger cette batterie de deux manières.

Si l'on réunit par un excitateur les armatures extrêmes, on obtient une étincelle correspondant à la charge a de la première bouteille et tous les conducteurs intermédiaires rentrent à l'état neutre. Il semble que, dans ce cas, le bénéfice de la batterie de cascades soit nul, puisque la quantité d'électricité qui disparaît est la même que si la première bouteille avait été seule déchargée.

Au contraire, si l'on démonte la batterie en enlevant les bouteilles une à une par des manches de verre, après avoir détaché la première de la machine, chacune des bouteilles restera chargée. On les placera alors dans une même caisse et l'on réunira par des tringles de métal toutes les armatures intérieures. On aura ainsi constitué une batterie ordinaire dont l'armature intérieure aura une quantité d'électricité égale à la somme des charges de toutes les bouteilles, c'est-à-dire

$$a + am + am^2 + \dots am^{n-1} = a(1 + m + \dots m^{n-1}).$$

Comme le coefficient m diffère très-peu de l'unité, la charge totale sera sensiblement égale à an, c'est-à-dire proportionnelle au nombre des bouteiles de la batterie. Si l'on réunit les deux armatures par un excitateur, il disparaîtra donc une quantité d'électricité notablement plus grande que dans le premier cas.

Franklin avait construit cette batterie [1] avec des condensateurs à plateaux formés de lames de verre couvertes d'étain sur les deux faces et suspendues par des cordons en soie les unes à la suite des autres à deux pouces de distance. Des dispositions convenables permettaient de réunir deux à deux les armatures en regard des lames voisines, de façon que le condenseur de l'une communiquât avec le collecteur de la suivante, puis, quand l'appareil était chargé dans cet état, de supprimer ces commu-

[1] Troisième lettre sur l'électricité (1748).

nications et de réunir ensemble tous les collecteurs entre eux d'une part, et tous les condenseurs entre eux ; après quoi la batterie était déchargée à la manière ordinaire.

Franklin avoue cependant n'avoir pas tiré grand profit de cette disposition de condensateurs en cascade, et il attribue son insuccès à la manière défectueuse dont les communications pouvaient être établies. En réalité, le bénéfice que Franklin espérait est tout à fait illusoire, et c'est à tort que l'on indique souvent ce moyen comme capable d'accélérer la charge d'une batterie. Nous verrons bientôt la théorie des actions électriques dans les cascades et les applications qui peuvent en résulter pour certaines expériences.

CHAPITRE VI

THÉORIE DES PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES

134. Définition du potentiel. — Propriété des dérivées premières. — Nous n'avons employé jusqu'à présent dans le calcul des phénomènes électriques que des considérations élémentaires, des raisonnements directs empruntés pour la plupart à Coulomb; mais on est bientôt arrêté dans cette voie, on ne peut évaluer ainsi les actions qui s'exercent entre deux corps électrisés que dans des cas tout à fait particuliers, et il n'est presque aucun phénomène de condensation dont on puisse rendre compte d'une manière entièrement satisfaisante. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des méthodes de calcul plus générales.

L'action mutuelle de deux masses électriques infiniment petites m et m' est une force dirigée suivant la droite qui les joint; elle est répulsive ou attractive, suivant que ces masses sont de même signe ou de signes contraires et elle varie en raison inverse du carré de leur distance r : on peut donc la représenter par

$$-\frac{mm'}{r^2},$$

en regardant la force comme positive ou négative, suivant qu'elle est une attraction ou une répulsion, et prenant pour unité d'électricité une masse qui, agissant sur une masse égale située à l'unité de distance, produit une force égale à l'unité.

Considérons une masse d'électricité positive égale à l'unité située en un point P, et soumise à l'action de plusieurs masses

infiniment petites, m, m', m''... distribuées d'une manière quelconque. Appelons x, y, z les coordonnées du point P rapportées à trois axes rectangulaires, ξ, η, ζ celles du point m, ξ', η', ζ' celles du point m', etc., r, r', r'',... les distances du point P aux différentes masses m, m', m'',...

Les composantes, parallèles aux axes de coordonnées, de la force que la masse m exerce sur le point P sont

$$-\frac{m}{r^2}\frac{\xi-x}{r}, \quad -\frac{m}{r^2}\frac{\eta-y}{r}, \quad -\frac{m}{r^2}\frac{\zeta-z}{r}.$$

Les composantes X, Y, Z, parallèles aux axes, de la résultante F des forces exercées par toutes les masses électriques considérées sur l'unité de masse au point P sont donc

$$X=-\sum\frac{m(\xi-x)}{r^3},$$

$$Y=-\sum\frac{m(\eta-y)}{r^3},$$

$$Z=-\sum\frac{m(\zeta-z)}{r^3}.$$

135. Ces trois sommes s'étendent à toutes les masses agissantes et on peut les remplacer par une seule somme. On a, en effet,

$$r^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2.$$

La distance r étant une fonction des coordonnées x, y, z du point P, les composantes X, Y, Z sont des fonctions des trois variables indépendantes x, y, z. En différentiant l'équation précédente par rapport à la variable x, on a

$$r\frac{dr}{dx}=-(\xi-x), \quad \frac{dr}{dx}=-\frac{\xi-x}{r},$$

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}=\frac{\xi-x}{r^3},$$

et, par suite,

$$X=-\sum m\frac{d\frac{1}{r}}{dx}.$$

Considérons l'intégrale

$$V=\sum\frac{m}{r},$$

étendue à toutes les masses agissantes; cette somme est aussi une fonction des coordonnées x, y, z du point P, et l'on a

$$\frac{dV}{dx}=\sum m\frac{d\frac{1}{r}}{dx}=-X.$$

On en conclut

$$(1)\qquad X=-\frac{dV}{dx},\quad Y=-\frac{dV}{dy},\quad Z=-\frac{dV}{dz};$$

d'où le théorème suivant :

Th. I. *Les composantes de l'action exercée sur une masse 1 d'électricité positive placée au point* P, *par l'ensemble des corps électrisés, sont les dérivées partielles, prises en signes contraires, d'une certaine fonction* V *des coordonnées du point* P.

Les propriétés remarquables de la fonction V pour l'étude des forces qui varient suivant la loi de Newton ont été signalées pour la première fois par Laplace, et utilisées par Poisson dans ses *Mémoires sur l'électricité*. Plus tard Georges Green [1] montra tout le parti que l'on peut tirer de cette fonction dans l'étude de l'électricité et du magnétisme et la désigna sous le nom de *fonction potentielle*. Le travail de Green est resté longtemps inconnu et plusieurs des théorèmes généraux qu'il a établis ont été retrouvés par différents mathématiciens à l'aide d'autres méthodes. Enfin Gauss a considéré la même fonction dans ses calculs sur l'attraction et l'a appelée le *potentiel*. M. Clausius conserve la dénomination de Green en réservant le nom de potentiel pour une autre fonction qui se déduit de la première, et plusieurs savants ont adopté ce langage; cependant la plupart des électriciens, surtout en Angleterre, appellent potentiel la fonction V, et cette dénomination paraissant consacrée aujourd'hui par l'usage le plus général, nous la conserverons.

[1] *An essay of the application of mathematical analysis to the theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham (1828). — *Math. papers of the late G. Green*. Nouvelle édition. London (1871).

136. **Surfaces de niveau.** — On appelle *surface de niveau* le lieu des points pour lesquels le potentiel V a une même valeur. Par le point P passe une surface de niveau, et une seule, et il est facile de voir que la force qui s'exerce en ce point est normale à la surface de niveau. On sait, en effet, que la normale à cette surface au point P fait avec les axes des coordonnées des angles dont les cosinus sont proportionnels aux dérivées partielles

$$\frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dV}{dz},$$

et par conséquent proportionnels aux composantes X, Y, Z de la force. On en conclut que la force est dirigée suivant la normale à la surface.

Soit dn la portion de normale comprise entre deux surfaces de niveau infiniment voisines V et $V + dV$, et supposons que l'axe des x coïncide avec la normale; on a alors

$$(I)' \qquad F = X = -\frac{dV}{dn}.$$

Ainsi, *la force qui s'exerce en un point est égale à la dérivée du potentiel par rapport à la normale à la surface de niveau passant par le point considéré, et cette force est dirigée du côté vers lequel le potentiel diminue.*

Dans les raisonnements qui précèdent, nous avons supposé que le point P est situé en dehors des masses agissantes; dans ce cas, la distance r ne devenant pas nulle, le quotient $\frac{1}{r}$ reste fini, et l'intégrale V a une valeur parfaitement déterminée; le potentiel est une fonction finie et continue de x, y, z, et les composantes X, Y, Z jouissent de la même propriété. Mais, lorsque le point P est situé à l'intérieur des masses agissantes, la fonction $\frac{1}{r}$ devenant infinie, la détermination des intégrales présente de graves difficultés.

Pour reconnaître si le théorème relatif aux dérivées premières du potentiel est encore exact lorsque le point P fait partie des masses agissantes, nous aurons recours à quelques propriétés des couches sphériques.

137. **Potentiel d'une couche sphérique homogène.** — L'action qu'une couche électrique répandue uniformément sur une surface sphérique exerce sur un point intérieur est nulle, comme nous l'avons vu (50 et 51) ; le potentiel de cette couche dans l'intérieur est donc constant, le premier théorème étant alors applicable, et il a partout la même valeur que pour le centre où il est égal à $\frac{M}{R}$, R désignant le rayon de la sphère et M la masse totale d'électricité.

De même, le potentiel d'une couche homogène comprise entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 est aussi constant pour tous les points intérieurs, et égal à la valeur qu'il possède au centre. Si ρ est la densité d'une couche comprise entre deux sphères infiniment voisines dont les rayons sont a et $a + da$, la variation du potentiel au centre due à cette couche est

$$dV = \rho \frac{4\pi a^2 da}{a} = 4\pi\rho a da.$$

On a donc, pour le potentiel en tous les points situés dans l'intérieur de la couche proposée,

$$V = \int_{R_1}^{R_2} 4\pi\rho a da = 2\pi\rho (R_2^2 - R_1^2).$$

138. D'autre part, l'action qu'exerce sur un point extérieur une couche sphérique homogène ou formée de couches concentriques homogènes (28) est la même que si toute la masse était concentrée au centre de la sphère ou $-\frac{M}{D^2}$, D étant la distance du point au centre et M la charge totale de la couche considérée. Les surfaces de niveau sont alors évidemment des sphères concentriques à la première, et la force en un point est égale et contraire à la dérivée du potentiel par rapport à D, ce qui donne

$$\frac{dV}{dD} = -\frac{M}{D^2},$$

d'où

$$V = \frac{M}{D},$$

la constante est nulle, le potentiel étant nul évidemment quand D devient infini.

Le potentiel d'une couche sphérique semblable sur un point extérieur est donc le même que si toute la masse était réunie au centre de la sphère.

139. **Généralité du premier théorème.** — Considérons maintenant un point P situé dans l'intérieur d'une sphère homogène de rayon R et de densité ρ, à une distance r du centre. Le potentiel en P des couches dont le rayon est plus grand que r est, puisque le point P se trouve dans l'intérieur de cette couche,

$$2\pi\rho(R^2 - r^2);$$

le potentiel au même point P du noyau intérieur est

$$\frac{M}{r} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3}{r} = \frac{4}{3}\pi\rho r^2.$$

Le potentiel total au point P est donc

$$V = 2\pi\rho(R^2 - r^2) + \frac{4}{3}\pi\rho r^2 = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho r^2.$$

Prenons le centre O de la sphère pour origine des coordonnées. Les dérivées partielles du potentiel seront

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{4}{3}\pi\rho x,$$
$$\frac{dV}{dy} = -\frac{4}{3}\pi\rho y,$$
$$\frac{dV}{dz} = -\frac{4}{3}\pi\rho z.$$

D'autre part, l'action exercée sur le point P par les couches qui lui sont extérieures est nulle; l'action du noyau intérieur est la même que si toute la masse était concentrée au centre et égale à

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho\frac{1}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho r.$$

Cette force est dirigée suivant le rayon OP, et ses composantes

parallèles aux axes sont

$$X = \frac{4}{3}\pi\rho x,$$

$$Y = \frac{4}{3}\pi\rho y,$$

$$Z = \frac{4}{3}\pi\rho z.$$

On voit qu'elles sont égales et de signes contraires aux dérivées partielles du potentiel.

140. Supposons enfin que le point P soit situé dans une masse agissante quelconque et partageons cette masse en deux parties : l'une comprise dans une sphère très-petite S comprenant le point P et l'autre extérieure à cette sphère. Le potentiel en P se compose du potentiel V_2 de la masse extérieure et du potentiel V_1 de la sphère S,

$$V = V_1 + V_2,$$

et les composantes de la force sont, de même, égales à la somme de celles qui proviennent séparément de ces deux couches,

$$X = X_1 + X_2.$$

Puisque le point P est extérieur à la deuxième masse, les composantes X_2, Y_2, Z_2 sont égales et de signes contraires aux dérivées du potentiel V_2. Si la densité de la petite sphère S est constante, il en est de même, comme nous venons de le voir, pour les forces X_1, Y_1, Z_1 et le potentiel V_1. Donc les composantes X, Y, Z de la force qui agit en P sont encore égales et contraires aux dérivés du potentiel en ce point.

Ici encore nous avons admis, pour simplifier la démonstration, que la densité est constante dans l'intérieur de la petite sphère qui renferme le point P ; on démontre d'ailleurs que le théorème est encore vrai si cette densité électrique n'est pas constante au voisinage du point P ; nous l'admettrons.

141. **Propriétés des dérivées secondes du potentiel.** — Les dérivées secondes du potentiel jouissent aussi de propriétés remarquables.

Considérons d'abord le cas où le point P est situé en dehors des masses agissantes ; la fonction $\frac{1}{r}$ ne devenant pas infinie, on peut différentier sous le signe Σ comme à l'ordinaire. On a trouvé, par une première opération,

$$\frac{dV}{dx} = -X = \sum m \frac{\xi - x}{r^3}.$$

Une deuxième opération par rapport à x donnera

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\sum m\left(\frac{1}{r^3} + \frac{\xi - x}{r^4}\frac{dr}{dx}\right) = -\sum \frac{m}{r^3}\left[1 - 3\left(\frac{\xi - x}{r}\right)^2\right];$$

on a, de même,

$$\frac{d^2V}{dy^2} = -\sum \frac{m}{r^3}\left[1 - 3\left(\frac{\eta - y}{r}\right)^2\right],$$
$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\sum \frac{m}{r^3}\left[1 - 3\left(\frac{\zeta - z}{r}\right)^2\right].$$

Ajoutant les trois équations membre à membre, il vient identiquement

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Ainsi, *quand le point* P *est en dehors des masses agissantes, la somme des trois dérivées secondes partielles du potentiel est nulle.*

Comme cette somme des trois dérivées joue un grand rôle dans la théorie, on la désignera pour abréger par le symbole ΔV, de sorte que l'équation précédente s'écrira :

$$\Delta V = 0.$$

142. Ce théorème important a été énoncé pour la première fois par Laplace ; mais Poisson a reconnu que le raisonnement n'est plus exact lorsque le point P est situé à l'intérieur des masses agissantes, parce que la fonction qui est placée sous le signe Σ devient alors infinie. Les dérivées secondes varient comme le cube des distances r et les éléments voisins du point P

ont une influence prédominante. Il faut alors recourir à d'autres méthodes.

Supposons d'abord que la masse agissante ait, dans le voisinage du point P, une densité constante ρ, et partageons encore cette masse en deux parties : une petite sphère S comprenant le point P et y produisant un potentiel V_1, et la partie extérieure dont le potentiel au même point est V_2.

Le potentiel au point P est

$$V = V_1 + V_2,$$

d'où l'on déduit

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2.$$

Comme le point P est en dehors des masses électriques extérieures à la sphère S, on a, d'après le théorème précédent,

$$\Delta V_2 = 0,$$

d'où

$$\Delta V = \Delta V_1.$$

La valeur de ΔV ne dépend donc que de la masse renfermée dans la petite sphère.

D'autre part, l'origine des coordonnées étant au centre de cette sphère, on a (139)

$$\frac{dV_1}{dx} = -\frac{4}{3}\pi\rho x,$$

$$\frac{dV_1}{dy} = -\frac{4}{3}\pi\rho y,$$

$$\frac{dV_1}{dz} = -\frac{4}{3}\pi\rho z;$$

il en résulte

$$\frac{d^2V_1}{dx^2} = \frac{d^2V_1}{dy^2} = \frac{d^2V_1}{dz^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho.$$

et, par suite,

$$\Delta V_1 = -4\pi\rho = \Delta V.$$

Nous admettrons, comme on le démontre par des considérations trop délicates pour trouver place ici, que le théorème est encore vrai quand la densité électrique n'est pas constante dans le voi-

sinage du point P et qu'on a, d'une manière générale, la relation

$$\text{(II)} \qquad \Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

ce qui donne le théorème :

Th. II. *La somme des trois dérivées secondes partielles du potentiel est égale à la densité électrique au point considéré multipliée par* -4π.

Ce théorème comprend comme cas particulier celui où $\rho = 0$, c'est-à-dire où le point considéré est situé en dehors des masses agissantes.

143. **Équilibre électrique dans un système de corps conducteurs.** — Quand un corps conducteur électrisé ou soumis à l'influence de corps électrisés est en équilibre, nous avons déjà dit que la force électrique doit être nulle en un point quelconque de l'intérieur du conducteur. En effet, si la force n'était pas nulle et s'il se trouvait en un point de l'électricité libre, cette électricité obéirait à la force électrique et marcherait dans un certain sens, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'équilibre. D'autre part, s'il n'y a pas d'électricité libre, les deux quantités $+m$ et $-m$ d'électricités contraires qui constituent une masse infiniment petite de fluide neutre seraient sollicitées en sens contraires et il se ferait une nouvelle décomposition du fluide neutre, ce qui est encore contraire à l'hypothèse. Mais, si la force électrique est nulle, ses trois composantes sont aussi nulles et, comme elles sont égales séparément aux dérivées premières du potentiel, il en résulte que ces dérivées sont nulles et que le potentiel est constant. Ainsi *le potentiel est constant dans toute l'étendue d'un conducteur en équilibre électrique.*

Si le potentiel est constant, les dérivées premières sont nulles en tous les points et il en est de même des dérivées secondes $\frac{d^2V}{dx^2}, \frac{d^2V}{dy^2}$ et $\frac{d^2V}{dz^2}$. La somme de ces dérivées secondes est aussi nulle et l'on a

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \Delta V = -4\pi\rho = 0;$$

par suite $\rho = 0$.

Ainsi, *la densité de l'électricité libre dans l'intérieur des corps conducteurs en équilibre est nulle.* Il en résulte que *l'électricité est distribuée suivant une couche infiniment mince à la surface de chaque conducteur.*

Nous avons vu (48) que Coulomb avait déjà démontré directement cette propriété en partant de la loi du carré des distances.

Si l'on désigne maintenant par μ la densité électrique de la couche superficielle, la masse d'électricité libre qui se trouve sur un élément de surface $d\sigma$ sera $\mu d\sigma$, et la masse totale répandue sur toute la surface d'un corps conducteur sera

$$M = \int \mu d\sigma.$$

Dans chacun des corps le potentiel a une valeur constante et cette valeur est la même qu'à la surface : la surface du corps est donc une surface de niveau.

144. Pour bien suivre le développement des phénomènes électriques, il importe de se familiariser avec la notion de potentiel et de s'en faire une certaine représentation.

Quand un conducteur est chargé d'électricité positive, le potentiel est constant dans toute l'étendue de ce corps, puis il varie à partir de la surface et diminue de plus en plus jusqu'à l'infini où il est nul. Si l'on imagine que l'on coupe le corps par un plan, on pourra se représenter les variations du potentiel aux différents points de ce plan, en élevant en chaque point une perpendiculaire proportionnelle à la valeur de cette fonction. Les extrémités de ces droites formeront une sorte de carte topographique en relief dans laquelle les points qui correspondent au conducteur seront représentés par un plateau à partir duquel le niveau ira en s'abaissant dans tous les sens, suivant une loi plus ou moins simple qui dépendra de la forme du conducteur lui-même.

S'il y a, au contraire, différents corps conducteurs en présence et que plusieurs d'entre eux soient coupés par le plan, la figure topographique présentera un certain nombre de plateaux à des hauteurs différentes, correspondant chacun à l'un des conducteurs, et ces plateaux seront séparés par des pentes plus ou

moins profondes et plus ou moins régulières. Il y a la plus grande analogie entre les lignes de niveau en topographie et les surfaces de niveau électriques et c'est précisément à cause de cela que cette dernière dénomination a été choisie. En prenant toujours pour guide cette comparaison, on se fera une idée très-exacte des phénomènes électriques.

145. Si l'on mène par un point de l'espace une ligne qui soit successivement normale à toutes les surfaces de niveau qu'elle rencontre, c'est-à-dire une orthogonale, la force électrique sera tangente en chacun des points de cette ligne. C'est là la traduction exacte de ce que Faraday appelait *lignes de force;* pour ce physicien, les lignes de force représentaient la manière dont se transmet la force électrique d'un point à un autre et il admettait volontiers que l'action électrique pouvait s'exercer en lignes courbes. On voit que, sans abandonner le principe fondamental des actions directes de deux points l'un sur l'autre suivant la droite qui les joint, on peut donner une interprétation très-claire des idées et des expériences de Faraday.

Les lignes de force sont analogues aux lignes de plus grande pente en topographie.

146. Supposons encore qu'une masse infiniment petite d'électricité positive m se déplace d'un point A à un autre point B (fig. 81) en suivant un chemin quelconque APB. Au point P cette masse m est soumise à la force électrique $f = -m\frac{dV}{dn}$ normale à la surface de niveau V qui passe en ce point P. Le travail de cette force quand la molécule va du point P au point P′ situé sur une surface de niveau infiniment voisine est, en appelant α l'angle que fait l'élément de trajectoire PP′ avec la normale à la surface de niveau en P,

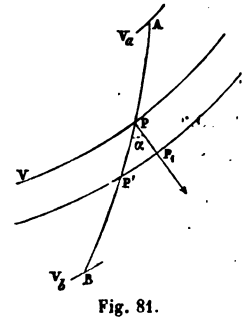


Fig. 81.

$$f\mathrm{PP'}\cos\alpha, = f\mathrm{PP}_1 = f dn.$$

Le travail total de la force électrique, pendant le déplacement

de la masse m de A en B, est

$$T = \int f\,dn = -m\int_A^B \frac{dV}{dn}\,dn = -m\,(V_b - V_a) = m\,(V_a - V_b);$$

ce travail dépend donc uniquement des valeurs V_a et V_b du potentiel aux deux points extrêmes A et B. En particulier, si la masse m s'éloigne jusqu'à l'infini, le travail électrique est alors mV_a; le travail pour une masse égale à l'unité serait simplement V_a.

Ainsi, *le potentiel en un point est le travail que produirait une masse électrique égale à l'unité* (1), *qui s'éloignerait de ce point jusqu'à l'infini ou jusqu'à un autre point où le potentiel serait nul;* ou bien encore *le travail qu'il faudrait dépenser pour amener une masse électrique égale à l'unité depuis l'infini jusqu'au point considéré.* Cette propriété a été prise quelquefois comme la définition même du potentiel.

Comme les niveaux électriques n'interviennent dans la plupart des phénomènes que par les différences et non par les valeurs absolues des potentiels correspondants, on convient habituellement de compter tous les potentiels à partir de celui qui existe sur le sol ou réservoir commun, auquel on suppose un potentiel égal à zéro.

147. **Capacités électriques.** — La notion de capacité électrique des conducteurs a été indiquée par Volta (2) dans des termes très-précis. Il rappelle une expérience par laquelle Franklin a vérifié que, lorqu'on augmente la surface d'un conducteur sans changer sa masse, on augmente en même temps sa capacité électrique: si un vase de métal renferme une chaîne, la capacité de ce vase est beaucoup plus grande quand on déploie la chaîne que si on la laisse accumulée dans le vase. Volta remarque de même que de deux conducteurs à surfaces égales, celui qui est le plus long a la plus grande capacité, et il indique un moyen pour comparer les capacités de deux conducteurs: c'est de déterminer le nombre

(1) On suppose dans cet énoncé que le déplacement de la masse que l'on envisage ne modifie pas d'une manière appréciable les valeurs du potentiel aux différents points.

(2) *Journal de physique* de l'abbé Rozier (avril 1779.)

tours de roue d'une machine électrique nécessaires pour onner à ces conducteurs la charge maximum, c'est-à-dire pour s amener à un état tel que l'électroscope posé sur la machine oit à sa déviation maximum. Volta trouve ainsi que la capacité un cylindre, de surface ou de volume déterminés, augmente apidement avec la longueur.

M. Thomson (1) a montré tout le parti que l'on peut tirer au oint de vue expérimental de la notion de capacité électrique. On peut remarquer d'abord que, pour un conducteur placé dans des conditions déterminées, le potentiel est proportionnel à la quantité d'électricité dont le conducteur est chargé. En effet, la superposition de deux états d'équilibre donne encore un nouvel état d'équilibre ; les couches électriques qui correspondent à chacun des états produisaient séparément un potentiel constant dans le conducteur et, si on les superpose, le potentiel nouveau sera égal à la somme des deux potentiels précédents et aura aussi une valeur constante. Si les deux états que l'on superpose sont identiques, le potentiel résultant de leur superposition sera doublé, et la charge électrique aussi doublée (2).

Ainsi, en désignant par V le potentiel d'un conducteur chargé d'une quantité M d'électricité, on peut écrire

$$V = \frac{M}{C},$$

C étant la capacité électrique du conducteur, c'est-à-dire la quantité d'électricité qui serait nécessaire pour établir sur ce conducteur un potentiel égal à l'unité.

148. Nous avons vu que, pour une sphère conductrice soustraite à toute action extérieure, on a

$$V = \frac{M}{R};$$

la capacité électrique d'une sphère est donc représentée par le même nombre que le rayon de la sphère.

(1) *Reprint of papers*, passim.

(2) Nous admettons ici que deux masses égales d'électricité en équilibre sur un conducteur sont distribuées de la même manière et produisent le même potentiel, en d'autres termes, qu'il n'y a qu'une distribution possible de l'électricité. Cette proposition, assez évidente d'ailleurs, sera démontrée plus loin.

Pour un conducteur de forme quelconque, isolé aussi de toute action étrangère, la charge électrique et le potentiel sont représentés par les formules suivantes, dans lesquelles μ désigne la densité électrique sur un élément de surface $d\sigma$, et r la distance de cet élément à un point quelconque situé dans ce conducteur,

$$M = \int \mu d\sigma,$$

$$V = \int \frac{\mu d\sigma}{r}.$$

L'expression mathématique de la capacité électrique est donc

$$C = \frac{M}{V} = \frac{\int \mu d\sigma}{\int \frac{\mu d\sigma}{r}};$$

mais la détermination de cette quantité par le calcul présenterait en général de très-grandes difficultés.

Il est facile de voir que les capacités de deux conducteurs semblables sont proportionnelles aux dimensions homologues. En effet, le potentiel de la couche électrique d'un élément de surface en un point P intérieur à un conducteur est $\frac{\mu d\sigma}{r}$; si l'on double les dimensions du conducteur sans changer la quantité d'électricité, la charge électrique $\mu' d\sigma'$ du nouvel élément de surface homologue du premier ne sera pas changée, la distance de cet élément au point P′ homologue du point P sera doublée, et le potentiel deviendra deux fois plus faible.

149. La comparaison des potentiels et des capacités électriques est un problème qui se présente constamment dans les recherches d'électricité et nous indiquerons plus tard les méthodes expérimentales qui permettent de le résoudre. Le principe général de ces déterminations est très-simple.

Considérons deux conducteurs A et A′ dont les capacités électriques sont C et C′ et qui sont chargés de quantités d'électricité M et M′ telles que le potentiel V soit le même sur les deux. Si l'on met ces corps en communication par un fil conducteur assez long pour qu'ils n'aient aucune action sensible l'un sur

autre, et assez fin pour que sa capacité électrique soit négligeable, les corps proposés A et A′ conserveront le même potentiel et le système sera en équilibre. On aura donc

$$V = \frac{M}{C} = \frac{M'}{C'} = \frac{M+M'}{C+C'},$$

équation qui exprime que la capacité $(C+C')$ de l'ensemble des deux conducteurs réunis est égale à la somme des capacités de chacun d'eux.

Si les deux masses M et M′ donnent séparément aux conducteurs les potentiels différents V et V′, on a

$$V = \frac{M}{C}, \quad V' = \frac{M'}{C'}.$$

En établissant une communication lointaine entre les deux conducteurs on les amènera au même potentiel V_1 déterminé par l'équation

$$V_1 = \frac{M+M'}{C+C'} = \frac{VC+V'C'}{C+C'},$$

qui donne le rapport des capacités $\frac{C}{C'} = \frac{V'-V_1}{V_1-V}$ à l'aide des potentiels.

Les charges nouvelles m et m' des conducteurs satisferont aux équations

$$V_1 = \frac{m}{C} = \frac{m'}{C'},$$

qui donnent

$$m = \frac{C}{C+C'}(M+M'),$$

$$m' = \frac{C'}{C+C'}(M+M').$$

150. L'équation

$$V_1(C+C') = VC+V'C'$$

indique qu'il y a entre les potentiels et les capacités électriques de deux conducteurs réunis par des communications lointaines la même relation qu'entre les températures et les capacités ca-

lorifiques dans le mélange de deux corps à des températures différentes. Dans ce dernier cas, en effet, le produit de la capacité calorifique du mélange (c'est-à-dire de sa valeur en eau) par la température finale est égal à la somme des produits de la capacité calorifique de chacun des corps par sa température initiale. Ces produits représentent les quantités de chaleur que dégageraient ces différents corps si on les ramenait à la température de zéro.

La seule différence qui existe entre les deux genres de phénomènes est que la capacité électrique d'un conducteur dépend de sa forme et, pour des formes semblables, est proportionnelle aux dimensions linéaires, tandis que la capacité calorifique d'un corps est simplement proportionnelle à son poids.

De même, si l'on met en communication lointaine un nombre quelconque de conducteurs dont les capacités électriques sont C, C′, C″... et les potentiels V, V′, V″..., la charge électrique de l'ensemble du système sera égale à la somme algébrique des charges de tous les conducteurs ; la capacité électrique C_1 du système et le potentiel final V_1 seront donnés par les relations

$$C_1 = C + C' + C'' + \ldots,$$
$$V_1 C_1 = VC + V'C' + V''C'' + \ldots.$$

On voit, d'après ces formules, que la détermination des capacités électriques pourra toujours être ramenée à une comparaison de potentiels.

151. **Influence électrique.** — Lorsque différents conducteurs sont en équilibre électrique, le potentiel a une valeur constante sur chacun d'eux, mais différente de l'un à l'autre.

En particulier, si l'un des corps A est seul chargé d'électricité, positive par exemple, et qu'un conducteur B à l'état neutre soit situé dans le voisinage, le potentiel du corps A aux différents points de ce conducteur n'est pas constant; il y a donc en chaque point une force électrique qui décompose le fluide neutre, attire le fluide de nom contraire et repousse le fluide de même nom jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint. Le conducteur B est alors chargé de deux couches, l'une d'électricité négative voisine du corps influent A, l'autre positive plus éloignée, et le potentiel dans ce conducteur a pris une valeur constante V_2. En même

temps, l'électricité du corps influent A s'est distribuée en général d'une autre façon et le potentiel y a baissé de sa valeur primitive V à une autre V_1. C'est là le phénomène habituel de l'*influence électrique*. Le calcul peut être fait d'une manière complète dans un certain nombre de cas simples.

152. Supposons, par exemple, que le corps influent A (fig. 82) soit une sphère chargée d'une masse $+ M_1$ d'électricité, et le corps influencé B une couche sphérique concentrique, séparée de la sphère par un milieu isolant. Si le conducteur B est resté isolé, il se charge d'une masse $- M_2$ sur sa surface intérieure et d'une masse égale et de signe contraire $+ M_2$ à sa surface extérieure; nous avons vu déjà que les deux masses M_1 et M_2 sont aussi égales (89).

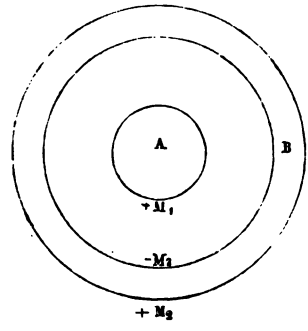


Fig. 82.

Soient R_1 le rayon de la sphère A, R_2 et R'_2 les rayons des surfaces interne et externe du conducteur B, V_1 le potentiel en A et V_2 le potentiel en B. On a, pour le centre commun,

$$V_1 = \frac{M_1}{R_1} - \frac{M_2}{R_2} + \frac{M_2}{R'_2} = M_1 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right],$$

$$= \frac{M_1}{R_1} \left[1 - \frac{R'_2 - R_2}{R'_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} \right].$$

Pour un point du conducteur B, les potentiels des couches $+ M_1$ et $- M_1$ sont égaux et de signes contraires, de sorte qu'il reste simplement

$$V_2 = \frac{M_2}{R'_2} = \frac{M_1}{R'_2}.$$

Si la sphère A était soustraite à toute influence, sa capacité électrique serait R_1; dans le cas actuel elle est, au contraire,

$$\frac{R_1}{1 - \frac{R'_2 - R_2}{R'_2} \cdot \frac{R_1}{R_2}};$$

elle a donc notablement augmenté par suite de la présence du conducteur B. Le rapport de la capacité électrique nouvelle à celle de la sphère isolée est

$$\frac{1}{1-\frac{R'_2-R_2}{R'_2}\cdot\frac{R_1}{R_2}}=\frac{R_2}{R_2-R_1\frac{R'^2-R_2}{R'_2}}.$$

Si le conducteur B est mis en communication avec le sol, la couche électrique $+M_2$ disparaît et le potentiel de ce conducteur devient nul; le potentiel de la sphère intérieure est alors

$$V_1=\frac{M_1}{R_1}-\frac{M_1}{R_2}=\frac{M_1}{R_1}\cdot\frac{R_2-R_1}{R_2},$$

et le rapport de la capacité nouvelle de la sphère A à la capacité qu'elle aurait si elle était seule est

$$\frac{R_1\dfrac{R_2}{R_2-R_1}}{R_1}=\frac{R_2}{R_2-R_1}.$$

La capacité de la sphère intérieure a donc beaucoup augmenté; elle est à peu près en raison inverse de la distance des deux conducteurs ou de l'épaisseur de la couche isolante.

153. **Théorèmes généraux sur les conducteurs fermés.** — Une partie des résultats que nous venons de trouver pour les enveloppes sphériques concentriques à une sphère influente est encore vraie pour des enveloppes conductrices de forme quelconque.

Comme nous démontrerons plus loin qu'il n'y a en général qu'un état d'équilibre, il nous suffira dans chaque cas particulier de trouver une solution pour être assurés que c'est la véritable.

Considérons d'abord un conducteur A de forme quelconque, chargé d'une quantité $+M_1$ d'électricité, et entouré complétement par un autre conducteur B mis en communication avec le sol. Quand l'équilibre existe, ce conducteur possède sur sa surface interne une certaine couche d'électricité contraire $-M_2$; il faut démontrer que $M_2=M_1$. En effet, le potentiel est constant dans toute l'étendue du conducteur A; ce potentiel V_1 est la

différence des potentiels des deux couches $+M_1$ et $-M_2$: chacun des potentiels des deux couches séparément n'est pas constant en général, c'est-à-dire que la couche $+M_1$ ne serait pas en équilibre d'elle-même, et que la couche $-M_2$, conservant sa distribution sur un conducteur de même surface, ne serait pas non plus en équilibre. En tous les points du conducteur B, le potentiel est aussi constant et égal à zéro, et cela quelle que soit la forme de ce conducteur ; il faut donc que le potentiel des deux masses $+M_1$ et $-M_2$ à l'extérieur soit nul rigoureusement en tous les points. Or, à une grande distance D, ce potentiel est sensiblement

$$\frac{M_1}{D} - \frac{M_2}{D},$$

et, pour qu'il soit nul, il faut que les deux masses M_1 et M_2 soient égales. Les deux couches $+M_1$ et $-M_2$ ont donc, en chaque point de l'extérieur, des actions égales et des signes contraires ; par conséquent, leurs surfaces de niveau sont identiques.

On peut même remarquer que s'il y avait dans l'intérieur du conducteur B des masses électriques quelconques distribuées d'une manière arbitraire sur des corps bons ou mauvais conducteurs, ce dernier théorème serait encore vrai.

Ainsi, *quand un corps électrisé ou un ensemble quelconque de corps électrisés est entouré complétement par un conducteur en communication avec le sol, la surface interne de ce conducteur se charge d'une couche électrique égale et de signe contraire à la somme algébrique de toutes les masses électriques qu'elle renferme, et l'action totale sur un point extérieur quelconque est nulle.*

Si le conducteur B n'est pas complétement fermé, il agira comme une sorte d'écran pour les points situés derrière lui ; le potentiel sera encore nul ou du moins variera très-lentement dans une certaine région, de sorte que l'action électrique y sera très-faible. C'est là le sens qu'il faut donner à ce fait expérimental que les actions électriques ne s'exercent pas au travers d'un conducteur en communication avec le sol.

Supprimons maintenant la communication avec le sol du conducteur B, toujours supposé fermé ; ce conducteur pourra re-

cevoir une charge électrique extérieure comme s'il était plein, ou comme s'il ne renfermait pas de corps électrisé. En effet, plaçons sur ce corps une couche régulière M ; le potentiel V de cette couche en un point quelconque du conducteur B ou de l'espace qu'il renferme est constant. Le potentiel nouveau du corps A est devenu $V_1 + V$; il est aussi constant et par suite l'équilibre existe.

En particulier, si l'on a $M = + M_2$, la masse totale d'électricité libre du conducteur B sera nulle, et le problème correspondra au cas où, le conducteur B étant primitivement à l'état neutre et isolé, on aurait introduit dans l'intérieur un corps A électrisé. Ainsi quand un corps A, ou un ensemble de corps électrisés d'une manière quelconque, est entouré complétement par un conducteur fermé primitivement à l'état neutre, ce conducteur se charge d'une couche électrique intérieure égale à la somme algébrique des masses qu'il renferme, et d'une couche égale sur sa surface extérieure. *La distribution de la couche extérieure est normale*, celle de la couche intérieure dépend au contraire de la disposition des masses électriques influentes.

154. On déduit encore de là un théorème important :

On peut remplacer un corps ou un système de corps électrisés par une couche électrique distribuée normalement sur une surface de niveau qui les renferme tous et dont la masse est égale à la somme algébrique des électricités que possèdent tous les corps considérés.

Soit B une surface de niveau qui renferme tous les corps proposés. Considérons un conducteur infiniment mince qui ait la forme de cette surface et plaçons sur ce conducteur une couche normale dont la masse totale — M soit égale et de signe contraire à la somme algébrique + M des électricités que possèdent les corps proposés ; il y aura équilibre. En effet, le potentiel intérieur V_B de la masse — M est constant puisque la distribution de cette couche est régulière ; comme le potentiel était primitivement constant sur chacun des conducteurs faisant partie du système proposé, il y est encore constant ; l'équilibre existe donc pour tout l'intérieur.

La couche électrique — M est aussi en équilibre, car en chaque point P de cette couche, l'action des corps intérieurs est

normale à la surface, puisque B est une surface de niveau, et l'action de la couche électrique elle-même est aussi normale, puisque cette couche est distribuée régulièrement; il ne peut donc pas y avoir de changement de distribution et l'équilibre existe.

Cette couche — M n'est autre chose que celle qui se produirait sur un conducteur en communication avec le sol et terminé intérieurement par la surface B ; l'action des deux masses + M et — M sur un point quelconque situé en dehors de la surface B est donc nulle, c'est-à-dire que ces deux masses ont en chaque point des actions égales et de signes contraires. Par conséquent, l'action d'une masse + M distribuée régulièrement sur la surface de niveau B produirait en dehors de cette surface des actions égales en chaque point à celles qui proviennent de tous les corps proposés.

155. **Condensation électrique.** — Nous pouvons maintenant préciser le phénomène de la condensation.

Une source électrique, de quelque nature qu'elle soit, est un appareil capable d'établir sur deux conducteurs une certaine différence de potentiel. Si l'un de ces conducteurs est maintenu en communication avec le sol, la source peut établir sur l'autre conducteur un potentiel déterminé. Si l'électricité que fournit la machine est dépensée à mesure de sa production, le débit est continu ; mais si cette électricité ne trouve d'issue que sur un conducteur isolé, la production d'électricité s'arrêtera absolument quand le potentiel aura acquis une certaine valeur, ou du moins, comme les déperditions ne peuvent pas être évitées d'une manière absolue, la production sera réduite uniquement à la quantité d'électricité suffisante pour maintenir ce potentiel en réparant les pertes dues à l'air et aux supports. D'autre part, si l'électricité que produit la machine est dépensée d'une manière continue, par exemple par une communication avec le sol, la quantité d'électricité fournie pendant l'unité de temps, ou le débit, dépendra des dimensions et du mode de construction de l'appareil. Une source d'électricité peut donc être définie par deux éléments, le *potentiel maximum* et le *débit maximum*.

156. Considérons maintenant un conducteur isolé A communiquant avec une source d'électricité : la charge limite de ce

conducteur sera atteinte quand il sera parvenu au potentiel maximum V de la source. Si la communication est établie par un fil assez long et fin pour que la distribution de l'électricité sur le conducteur soit normale, la charge M qu'il prendra sera, en désignant par C sa capacité,

$$M = CV.$$

Si l'on met en présence de ce conducteur A un second conducteur B, les phénomènes d'influence diminuent le potentiel du premier ou augmentent sa capacité électrique qui devient alors C_1. L'équilibre n'existe plus et le conducteur A reçoit de nouveau de l'électricité de la source jusqu'à ce que sa charge soit devenue

$$M_1 = C_1 V$$

et l'appareil est alors un véritable condensateur dont A est le collecteur.

Ces deux équations donnent

$$\frac{M_1}{M} = \frac{C_1}{C}.$$

On voit d'après cela que la force condensante d'un condensateur, c'est-à-dire le rapport des charges que prend le collecteur, lorsque le condenseur existe ou non, est égal au rapport des capacités électriques de ce collecteur dans les deux cas.

Ainsi, dans le cas que nous avons examiné plus haut (152), d'une sphère entourée par une couche sphérique concentrique isolée, la force condensante a pour expression

$$\frac{R_2}{R_2 - R_1 \frac{R'_2 - R_2}{R'_2}}.$$

Si le condenseur, au lieu d'être isolé, est mis en communication avec le sol, les phénomènes d'influence deviennent plus grands et la force condensante augmente également.

Pour le même exemple d'une sphère entourée par un conducteur sphérique, la force condensante est alors

$$\frac{R_2}{R_2 - R_1}.$$

157. On peut remarquer encore que si le collecteur A, au lieu d'être en communication permanente avec la source, est chargé à refus, puis isolé et seulement alors soumis à l'influence du condenseur, le potentiel du collecteur, qui était d'abord égal à celui de la source V, diminue jusqu'à une autre valeur V_1 sans que sa charge M ait été modifiée. Ce nouveau potentiel satisfait aux équations

$$M = CV = C_1 V_1 ;$$

on en déduit

$$\frac{C_1}{C} = \frac{V}{V_1}.$$

La force condensante est donc aussi égale au rapport des potentiels que donne une même charge électrique au collecteur lorsqu'il est soustrait à toute influence ou qu'il est en présence du condenseur. Ces trois expressions

$$\mathcal{F} = \frac{M_1}{M} = \frac{C_1}{C} = \frac{V}{V_1}$$

de la force condensante peuvent servir de principes à des méthodes différentes pour la déterminer par expérience.

158. **Formule de Green.** — Les théorèmes généraux que nous venons d'établir par un raisonnement sommaire peuvent être démontrés d'une manière plus complète à l'aide d'une formule de transformation due à Georges Green.

Soient U et V deux fonctions quelconques finies et continues de x, y, z. Posons, comme précédemment,

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2},$$

et considérons l'intégrale

$$\int\int U \Delta V \, dx \, dy \, dz,$$

étendue au volume enveloppé par une surface fermée convexe S (fig. 83). Cette intégrale est composée

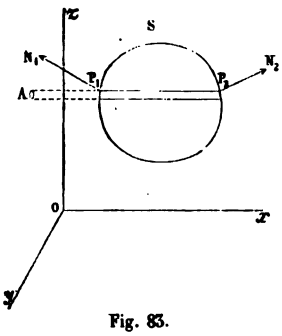


Fig. 83.

de trois termes de la forme

$$\int\int\int U\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\,dy\,dz = \int\int dy\,dz \int U\frac{d^2V}{dx^2}\,dx.$$

Dans l'intégrale $\int U\frac{d^2V}{dx^2}\,dx$, les coordonnées y et z restent constantes et les limites de l'intégration sont les abscisses x_1 et x_2 des deux points P_1 et P_2 où une droite parallèle à l'une des x rencontre la surface S. On a donc, en intégrant par parties,

$$\int_{x_1}^{x_2} U\frac{d^2V}{dx^2}\,dx = -\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_1} + \left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}\,dx,$$

et, par suite,

$$\int\int\int U\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\,dy\,dz = \int\int\left[-\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_1} + \left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_2}\right]dz\,dy - \int\int\int\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}\,dx\,dy\,dz.$$

Le produit $dxdydz$ représente un élément de volume dv, et le produit $dydz$ un élément de surface $d\omega$ pris sur le plan des yz; on peut donc écrire l'équation précédente sous la forme plus simple

$$\int U\frac{d^2V}{dx^2}\,dv = \int\left[-\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_1} + \left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_2}\right]d\omega - \int\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}\,dv.$$

L'élément $d\omega$ est la projection sur le plan yOz de deux éléments dz_1 et dz_2 de la surface S, situés aux points P_1 et P_2. Si l'on appelle $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, les cosinus des angles que les normales P_1N_1, P_2N_2 à la surface aux points P_1 et P_2 font avec les axes des coordonnées, la normale en chaque point étant menée à l'extérieur du volume enveloppé par la surface, on a

$$d\omega = -\alpha_1\,dz_1 = +\alpha_2\,dz_2,$$

et, par suite,

$$\int\left[-\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_1} + \left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_2}\right]d\omega = \int\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_1}\alpha_1 dz_1 + \int\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_2}\alpha_2 dz_2$$

ais le second membre est l'intégrale

$$\int U \frac{dV}{dx} \alpha d\sigma$$

tendue à toute la surface S; on a donc

$$\int U \frac{d^2V}{dx^2} dv = \int U\alpha \frac{dV}{dx} d\sigma - \int \frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx} dv.$$

Les deux autres parties de l'intégrale proposée donnent des équations analogues et, en les ajoutant terme à terme, il vient

$$\int U\Delta V dv = \int U\left(\alpha\frac{dV}{dx}+\beta\frac{dV}{dy}+\gamma\frac{dV}{dz}\right)d\sigma - \int\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right)dv.$$

Soit ds un élément PP′ de la normale à la surface S, menée par le point P vers l'extérieur; les cosinus α, β, γ des angles que cette normale fait avec les axes ont pour expressions

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \beta = \frac{dy}{ds}, \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

On en déduit

$$\alpha\frac{dV}{dx}+\beta\frac{dV}{dy}+\gamma\frac{dV}{dz} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dV}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dV}{dz}\frac{dz}{ds} = \frac{dV}{ds},$$

ce qui donne finalement

$$\int U\Delta V dv = \int U\frac{dV}{ds}d\sigma - \int\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right)dv,$$

l'intégrale double s'étendant à la surface S, et les deux intégrales triples au volume enveloppé par cette surface. Telle est la formule de Green.

Pour simplifier, on a supposé le volume limité par une surface convexe, mais il est facile de démontrer que la même formule est applicable à une surface quelconque, pourvu bien entendu que cette surface soit fermée.

159. Nous supposerons dans ce qui suit que V désigne le po-

tentiel d'un système de masses électriques, ou plus généralement d'un agent quelconque s'exerçant suivant la loi de Newton.

Si, dans la formule de Green on fait $U = 1$, elle se réduit à

$$\int \Delta V \, dv = \int \frac{dV}{ds} d\sigma ;$$

si l'on remplace ensuite ΔV par sa valeur $-4\pi\rho$, il devient

$$-4\pi \int \rho dv = \int \frac{dV}{ds} d\sigma .$$

Mais l'intégrale $\int \rho dv$ n'est autre chose que la somme M des masses agissantes situées dans le volume considéré ; on a donc la relation

$$\text{(III)} \qquad \int \frac{dV}{ds} d\sigma = -4\pi M .$$

On peut énoncer cette relation de la manière suivante :

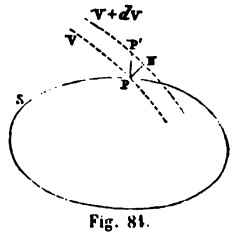


Fig. 84.

Nous avons désigné par ds un élément extérieur PP′ (fig. 84) de la normale à la surface S; considérons les deux surfaces de niveau V et $V + dV$ qui passent par les points P et P′; appelons dn l'élément PN de la normale à la surface V compris entre les deux surfaces de niveau, et i l'angle NPP′ des deux normales. Dans le triangle rectangle PNP′ on a

$$dn = ds \cos i ;$$

il en résulte

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn} \cos i = -F \cos i ;$$

F désignant la force qui s'exerce au point P et qui est dirigée suivant la normale PN à la surface de niveau, F cos i est la projection de cette force sur la normale PP′ à la surface S. L'équa-

tion (III) prend ainsi la forme

$$\text{(III)}' \qquad \int F \cos i \, d\sigma = 4\pi M,$$

d'où l'on déduit le théorème suivant :

Th. III. — *La somme des composantes normales des forces qui s'exercent sur les différents éléments d'une surface fermée est égale à la masse agissante enveloppée par cette surface, multipliée par le facteur constant* 4π.

160. Th. IV. — *La différence des forces qui s'exercent sur deux éléments correspondants de deux surfaces de niveau est égale à la masse agissante contenue dans le canal orthogonal compris entre ces deux éléments, multipliée par le facteur constant* 4π.

Soient S_1 et S_2 (fig. 85) deux surfaces de niveau ; prenons sur la première un élément $d\sigma_1$ et, par chacun des points du périmètre de cet élément, menons une ligne orthogonale aux surfaces de niveau comprises entre S_1 et S_2 ; le canal ainsi formé découpera sur la surface S_2 un élément correspondant $d\sigma_2$.

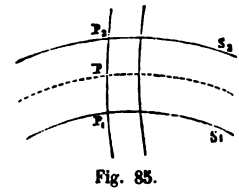


Fig. 85.

Appliquons le théorème précédent au volume enveloppé par le canal et les deux éléments qui le terminent ; il faut étendre l'intégrale à toute la surface du canal. En chaque point de la surface latérale, la force est tangente à la ligne orthogonale, sa composante normale est nulle ; l'intégrale se réduit donc aux termes fournis par les deux bases $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$.

Si l'on mène les normales dans le sens P_1P_2 la relation (III) devient

$$\text{(IV)} \qquad \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1 = -4\pi m,$$

m étant la masse agissante comprise dans le canal orthogonal.

Lorsqu'il n'y a aucune masse agissante entre les deux surfaces

de niveau, on a

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1,$$

et par conséquent les forces qui s'exercent sur les éléments correspondants sont égales.

161. Th. V. — *La force qui s'exerce en un point infiniment voisin d'une couche électrique est égale à la densité électrique sur la surface multipliée par* 4π.

Dans un système électrisé quelconque en équilibre, la surface S d'un conducteur est une surface de niveau, et sur cette surface est répandue une couche électrique. Prenons un élément $d\sigma$ de cette surface et considérons deux surfaces voisines, savoir : une surface de niveau extérieure S_2 dans le voisinage de l'élément $d\sigma$, et une surface intérieure S_1 ; par chaque point du périmètre de l'élément $d\sigma$, menons à l'extérieur une orthogonale aux surfaces de niveau comprises entre S et S_2, et prolongeons cette ligne arbitrairement à l'intérieur, jusqu'à la surface S_1 ; nous formerons ainsi un canal détachant sur les surfaces S_2 et S_1 les éléments $d\sigma_2$ et $d\sigma_1$. Appliquons le théorème III à ce canal ; l'intégrale doit être étendue à la surface qui l'enveloppe.

Pour toute la partie qui est située à l'intérieur du conducteur les éléments de l'intégrale sont nuls, puisque V est constant. La normale en un point de la partie extérieure de la surface latérale du canal est tangente à la surface de niveau qui passe en ce point ; quand on marche sur cette normale on a $\frac{dV}{ds} = 0$, et les éléments de l'intégrale sont encore nuls pour cette partie de la surface du canal. L'intégrale se réduit donc au terme $\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2$ fourni par la base extérieure $d\sigma_2$. D'autre part, μ étant la densité électrique sur l'élément $d\sigma$, la masse électrique contenue dans le canal est $\mu d\sigma$. L'équation (III) devient donc

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = -4\pi\mu d\sigma,$$

ou

$$-\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 \frac{d\sigma_2}{d\sigma} = 4\pi\mu.$$

l'on suppose que la surface S_2 se rapproche de plus en plus de surface S, le rapport $\frac{d\sigma_2}{d\sigma}$ a pour limite l'unité, l'expression $\left(\frac{dV}{dn}\right)_2$ représente la dérivée du potentiel en un point de la surface S, et l'équation précédente se réduit à

$$(V) \qquad -\left(\frac{dV}{dn}\right) = 4\pi\mu = F.$$

Nous avons déjà démontré directement ce théorème (58).

162. Th. VI. — *Les éléments correspondants de deux couches placées en regard l'une de l'autre contiennent des quantités d'électricité égales et de signes contraires.*

Considérons deux conducteurs A et B (fig. 86) électrisés et placés en regard l'un de l'autre, de telle sorte que deux parties S_1 et S_2 de leurs surfaces soient comprises dans un même canal orthogonal ne renfermant entre ces deux couches répandues sur S_1 et sur S_2 aucune autre masse électrique. Appelons *éléments correspondants* des deux couches, les éléments $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ compris dans un canal orthogonal infiniment petit; imaginons ce canal prolongé d'une manière quelconque dans l'intérieur des deux corps et fermé aux deux bouts, et appliquons à ce volume la relation (III); tous les éléments de l'intégrale sont nuls : d'ailleurs la masse électrique qui y est contenue est $\mu_1 d\sigma_1 + \mu_2 d\sigma_2$, μ_1 et μ_2 désignant les densités sur $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$; l'équation se réduit donc à :

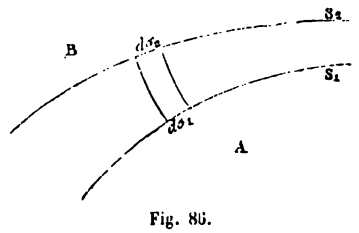


Fig. 86.

$$(VI) \qquad \mu_1 d\sigma_1 + \mu_2 d\sigma_2 = 0.$$

163. Supposons que les deux surfaces S_1 et S_2 soient très-voisines l'une de l'autre, et appelons e la distance des éléments $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ correspondants. Ces deux éléments étant sensiblement égaux, on a approximativement $\mu_2 = -\mu_1$. La densité est donnée d'ailleurs par la relation (V)

$$\mu_1 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dn}\right);$$

mais quand on va de la surface S_1 à la surface S_2, la dérivée du potentiel diffère peu de $\frac{V_2 - V_1}{e}$, on a donc la formule approchée

$$\text{(VI)'} \qquad \mu_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}.$$

Ainsi, *la densité électrique en chaque point varie en raison inverse de la distance des deux surfaces.*

164. Th. VII. — *Lorsque, dans un système électrisé en équilibre, un corps conducteur enveloppe diverses masses électriques, la somme algébrique des quantités d'électricité situées à l'intérieur et sur la surface interne du corps est nulle.*

Soient m, m', m'' ..., les masses électriques situées à l'intérieur du corps conducteur enveloppant A (fig. 87); sur la surface interne du corps est répandue une couche M_1 et sur la surface externe une couche M_2; il peut y avoir d'autres masses électriques en dehors. Imaginons une surface fermée S dans le corps A lui-même, c'est-à-dire entre sa surface interne et sa surface externe, et appliquons au volume enveloppé par cette surface le théorème III. Le potentiel V de tout le système ayant une valeur constante dans le corps A, la dérivée $\frac{dV}{ds}$ est nulle en chaque point de la surface S; on a donc $M = 0$ et, par suite,

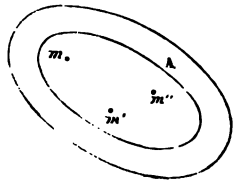


Fig. 87.

$$\text{(VII)} \qquad M_1 + m + m' + m'' + \ldots = 0.$$

Les masses m, m'...., peuvent appartenir à des corps mauvais conducteurs ou bien être des couches répandues à la surface des corps conducteurs isolés les uns des autres et de la surface interne du corps A.

S'il n'y a pas d'autres masses électriques que celles qui sont enveloppées par le corps A et que ce corps ait été primitivement à l'état neutre, il sera électrisé par influence, et la somme algébrique des quantités d'électricité libre développées sur ce corps sera nulle; on aura donc

$$M_2 = -M_1 = m + m' + m'' + \ldots.$$

La quantité d'électricité développée par influence sur un conducteur enveloppant est égale à la quantité d'électricité influente. La couche extérieure M_2 est en équilibre d'elle-même; mais la distribution de la couche intérieure $-M_1$ dépend de la disposition des masses influentes. C'est le théorème de Faraday (153).

165. Th. VIII. — *Quand une surface fermée ne renferme aucune masse agissante et que sur cette surface le potentiel est constant, le potentiel est aussi constant dans tout le volume enveloppé par la surface.*

Supposons que dans la formule de Green, les deux fonctions U et V soient égales et représentent un même potentiel, on aura

$$\int V\Delta V dv = \int V \frac{dV}{ds} d\sigma - \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] dv;$$

si l'on remplace ΔV par sa valeur $-4\pi\rho$ et si l'on remarque que

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = F^2,$$

il vient

$$\int F^2 dv = \int V \frac{dV}{ds} d\sigma + 4\pi \int \rho V dv.$$

La surface proposée S ne renfermant aucune masse agissante, on a $\rho = 0$ dans tout le volume et, par suite,

$$\int \rho V dv = 0.$$

D'autre part, le potentiel ayant une valeur constante V_1 sur toute la surface, on a, en vertu du theorème III,

$$\int V \frac{dV}{ds} d\sigma = V_1 \int \frac{dV}{ds} d\sigma = -V_1 4\pi M = 0.$$

On en déduit

$$\text{(VIII)} \qquad \int F^2 dv = 0.$$

Cette intégrale ne peut être nulle que si la force électrique est nulle en tous les points; par conséquent, le potentiel est constant dans toute l'étendue du volume.

166. Th. IX. — *Un système formé de masses électriques fixes et de charges électriques données sur des corps conducteurs n'admet qu'un état d'équilibre.*

Considérons d'abord un système formé seulement de corps conducteurs $A_1, A_2, A_3, \ldots$ isolés et tels que chacun d'eux renferme des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative, je dis que le seul état d'équilibre est l'état neutre. Admettons en effet qu'il s'établisse un autre état d'équilibre, et appliquons la formule que nous venons d'établir

$$\int V \Delta V \, dv = \int V \frac{dV}{ds} \, d\sigma - \int F^2 dv,$$

au volume compris entre les surfaces des différents conducteurs et la surface d'une sphère d'un très-grand rayon qui les renferme tous.

Le premier membre de cette équation est nul, puisqu'il n'y a aucune masse électrique dans le volume considéré; la densité électrique est nulle partout, le facteur ΔV est aussi nul en tous les points.

L'intégrale $\int V \frac{dV}{ds} \, d\sigma$ se compose de deux parties, l'une relative à la surface des différents conducteurs et l'autre à la surface de la sphère. Sur chacun des conducteurs le potentiel est constant, et la dérivée $\frac{dV}{ds}$ est égale à $-4\pi\mu$; on a donc, pour cette première partie,

$$\int V \frac{dV}{ds} \, d\sigma = -4\pi V \int \mu \, d\sigma = -4\pi V M,$$

M désignant la masse électrique totale répandue sur le conducteur considéré. Or, cette masse est nulle et les termes de l'intégrale relatifs aux différents conducteurs sont tous nuls.

Pour la partie qui est relative à la surface de la sphère, on peut remarquer que le potentiel diminue à mesure qu'on augmente le rayon de cette sphère et tend vers zéro; plus rigoureusement, sur une surface sphérique suffisamment éloignée dont le centre est dans le voisinage des corps électrisés, le potentiel est en raison inverse de la distance ou du rayon, la

force électrique $\frac{dV}{ds}$ en raison inverse du carré du rayon, de sorte que l'intégrale tout entière variera comme l'inverse du rayon et tendra vers zéro.

Le deuxième terme du second membre doit donc être nul aussi, ce qui exige que l'on ait

$$F = 0.$$

On voit que la force électrique est nulle en tous les points du volume considéré. Or, dans le voisinage d'un conducteur, cette force est égale à $4\pi\mu$, la densité électrique μ est donc nulle en tous les points de la surface des différents conducteurs et, par suite, tous ces conducteurs sont à l'état neutre.

Considérons maintenant un système quelconque formé de masses électriques fixes m, m', m'',... appartenant à des corps non conducteurs, et de charges M_1, M_2, M_3,... répandues sur des corps conducteurs A_1, A_2, A_3,...; nous voulons démontrer qu'il n'y a qu'un état d'équilibre. Supposons qu'il y en ait deux; appelons μ_1, μ_2,... les densités des couches répandues sur les corps conducteurs dans le premier état, μ'_1, μ'_2,... les densités dans le second état. Si l'on change les signes de toutes les masses électriques dans le second état, on aura un nouvel état d'équilibre, $-m$, $-m'$, $-m''$,... $-\mu'_1$, $-\mu'_2$,.... Ajoutant cet état au premier, on obtiendra un nouvel état d'équilibre, dans lequel les masses fixes m et $-m$, m' et $-m'$... se neutralisent, et la densité des diverses couches devient $\mu_1 - \mu'_1$, $\mu_2 - \mu'_2$,...; la somme algébrique des quantités d'électricité qui forment chaque couche est nulle. On rentre alors dans le cas particulier que nous avons étudié d'abord; ce nouvel état d'équilibre est l'état neutre, et l'on a $\mu'_1 = \mu_1$, $\mu_2' = \mu_2$,... Ainsi, le système proposé ne peut présenter qu'un état d'équilibre.

167. Corollaire. — *Si un conducteur présente des cavités qui ne renferment aucune masse agissante, toute l'électricité se porte sur la surface du corps comme s'il était plein.*

Soit en effet M la masse d'électricité libre que possède le conducteur. Si l'on suppose ce conducteur plein, la masse M sera distribuée à la surface et le potentiel sera constant en tous les points du corps. Creusons maintenant des cavités quelconques

dans ce conducteur sans modifier la couche superficielle, le potentiel ne sera pas changé, il y aura donc encore équilibre et les surfaces internes ne seront pas électrisées. Comme il n'y a qu'un état d'équilibre pour une masse électrique donnée, le théorème est démontré.

168. Th. X. — *Lorsque diverses masses électriques sont entourées complétement par une surface de niveau, on peut, sans troubler l'équilibre, les remplacer par une couche électrique, de masse égale à leur somme algébrique, distribuée sur la surface de niveau de façon que la densité en chaque point soit en raison inverse de la distance de deux surfaces de niveau infiniment voisines.*

Soient m, m', m'',.,. (fig. 88) des masses électriques quelconques, appartenant à des corps conducteurs ou non, S_1 une surface de niveau qui les enveloppe et dont le potentiel est V_1. Supposons que l'on fixe toutes ces masses électriques et imaginons un conducteur communiquant avec le sol et terminé intérieurement par la surface S_1. Il se produit sur cette surface par influence une couche $-M_1$ (Th. VII) telle que l'on ait

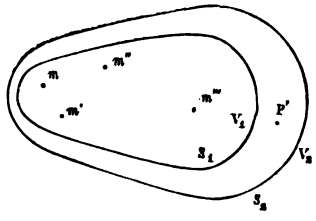


Fig. 88.

$$-M_1 + m + m' + m'' + \ldots = 0,$$

et le potentiel est nul en tout point extérieur à la surface S_1. Le potentiel de la couche S_1 est donc pour tout point extérieur P égal et de signe contraire au potentiel de l'ensemble des masses $m + m' + m'' + \ldots$; une couche de masse $+ M_1$ distribuée de la même manière sur la surface S_1 pourra donc remplacer les masses proposées. Cette couche serait d'ailleurs en équilibre si la surface S_1 était conductrice, car le potentiel V_1 est constant sur cette surface, et d'après le théorème VIII, il est aussi constant dans tout l'intérieur puisque la surface ne renferme plus de masse agissante.

Considérons une deuxième surface de niveau S_2 qui ne renferme aucune masse électrique nouvelle. Une couche de masse

$M_2 = M_1$ distribuée sur cette surface d'une manière convenable aura encore en tout point extérieur un potentiel égal à celui des masses proposées, et le potentiel à l'intérieur sera alors égal à V_2.

Pour déterminer la loi de distribution il suffit maintenant de remarquer que les deux couches $+M_1$ et $-M_2$ ont à l'extérieur un potentiel nul, et à l'intérieur de la surface S_1 un potentiel constant égal à $V_1 - V_2$. L'équilibre existerait donc si ces deux couches étaient répandues, la première sur un conducteur terminé par la surface S_1, la seconde sur un conducteur communiquant avec le sol et présentant une cavité limitée à la surface S_2. Deux éléments correspondants $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ de ces surfaces posséderont des quantités d'électricités égales et de signes contraires (Th. VI), et, si l'on suppose les deux surfaces infiniment voisines, la densité μ_1 sur la surface intérieure en un point où la distance des surfaces est égale à e sera donnée par l'équation (VI)'

$$\mu_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}.$$

Remarquons encore qu'en un point P' situé entre les surfaces S_1 et S_2 le potentiel n'a pas changé. On peut donc, sans changer l'état électrique des points compris entre deux surfaces de niveau S_1 et S_2, remplacer toutes les masses intérieures à la surface S_1 par la couche $+M_1$ et les masses extérieures à la surface S_2 par la couche $-M_2$ égale et de signe contraire à la première.

169. Nous appliquerons encore la formule de Green à la démonstration du théorème suivant, énoncé par Riemann [1].

Th. XI.—*Deux conducteurs* A *et* B *sont mis en présence dans un milieu isolant, et dans leur voisinage peuvent se trouver des corps conducteurs quelconques mis en communication avec le sol. Le conducteur* A *étant porté à un certain potentiel* V_1 *et* B *communiquant avec le sol, ce dernier prend une certaine charge électrique* M_b. *Inversement, si* B *est porté au même potentiel* V_1 *et* A *relié au sol, les conducteurs voisins restant dans le même état, le conducteur* A *prendra une charge* M_a *égale à* M_b.

Désignons par U le potentiel en un point P, lorsque le conducteur A est au potentiel V_1, tous les autres conducteurs communi-

[1] Clausius, *Théorie mécanique de la chaleur*, Traduct. de M. Folie, T. II, p. 38.

quant avec le sol, et par V le potentiel au même point P, lorsque le conducteur B est au potentiel V_1, les autres n'étant pas isolés.

Si dans la formule de Green, on permute les lettres U et V et que l'on retranche membre à membre les deux équations, il vient

$$\int U\Delta V\,dv - \int V\Delta U\,dv = \int U\frac{dV}{ds}\,d\sigma - \int V\frac{dU}{ds}\,d\sigma.$$

Les fonctions U et V ayant la signification que nous venons de leur donner, si l'on étend cette équation à tout l'espace compris entre les différents conducteurs et une sphère de très-grand rayon, on a pour tous les poins de cet espace $\Delta U = 0$ et $\Delta V = 0$; le premier membre de l'équation est nul et il reste

$$\int U\frac{dV}{ds}\,d\sigma = \int V\frac{dU}{ds}\,d\sigma.$$

Les parties de ces intégrales qui correspondent à la surface de la sphère tendent vers zéro à mesure que le rayon de cette sphère va en augmentant ; on peut donc les négliger, et il ne reste que les portions des intégrales relatives aux surfaces des différents conducteurs.

La fonction U est égale à zéro sur tous les conducteurs autres que le conducteur A et sur ce conducteur elle a une valeur constante V_1. L'intégrale du premier membre se réduit donc au terme relatif au corps A et, en désignant par $d\sigma_a$ l'élément de surface de ce corps, on a simplement

$$\int U\frac{dV}{ds}\,d\sigma = V_1\int\frac{dV}{ds}\,d\sigma_a.$$

De même la fonction V est nulle sur tous les conducteurs autres que B, sur lequel elle est égale à V_1, on a donc aussi

$$\int V\frac{dU}{ds}\,d\sigma = V_1\int\frac{dU}{ds}\,d\sigma_b,$$

d'où

$$\int\frac{dV}{ds}\,d\sigma_a = \int\frac{dU}{ds}\,d\sigma_b.$$

Si l'on désigne par μ_a la densité électrique en un point du conducteur A non isolé, lorsque B est le corps influent, on a pour la surface du corps A

$$\frac{dV}{ds} = -4\pi\mu_a;$$

par suite,

$$\int \frac{dV}{ds} d\sigma_a = -4\pi \int \mu_a d\sigma_a = -4\pi M_a,$$

M_a étant la charge totale que prend le conducteur A dans ces conditions. On a de même

$$\int \frac{dU}{ds} d\sigma_b = -4\pi \int \mu_b d\sigma_b = -4\pi M_b,$$

et il en résulte

$$M_a = M_b.$$

170. **Bouteille de Leyde.** — Une bouteille de Leyde constitue, comme nous l'avons vu, un condensateur dans lequel l'une des armatures est enveloppée par l'autre presque complétement et l'on peut appliquer à cet appareil, au moins d'une manière approchée, les théorèmes relatifs aux conducteurs fermés. Ainsi, l'armature intérieure de la bouteille étant mise en communication avec une source au potentiel V_1, se charge d'une certaine quantité d'électricité M_1 ; si l'armature extérieure est isolée, elle prend sur sa face interne une charge $-M_1$ et sur sa face externe une charge $+M_1$. Si l'armature extérieure communique avec le sol, la charge $+M_1$ disparaît, de sorte que les armatures de la bouteille sont chargées de quantités égales d'électricités différentes.

Pour évaluer la charge de cet appareil, nous supposerons d'abord que la lame de verre qui sépare les armatures n'a d'autre rôle que d'être une substance absolument isolante. Soient A l'armature intérieure dont le potentiel est V_1, B l'armature extérieure dont le potentiel est V_2.

Les éléments correspondants des deux armatures ont des charges égales et de signes contraires, et si leur distance e est

très-petite, la densité μ_1 sur l'armature intérieure sera donnée (163) par la relation

$$4\pi\mu_1 = -\frac{V_2 - V_1}{e} = \frac{V_1 - V_2}{e}.$$

La masse totale M_1 d'électricité répandue sur l'armature intérieure est

$$M_1 = \int \mu_1 d\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi} \int \frac{d\sigma}{e}.$$

Si l'épaisseur du milieu isolant est constante, il reste simplement

$$M_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e} \int d\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e} S_1.$$

La charge de la bouteille est donc proportionnelle à sa surface S_1, à la différence des potentiels des armatures, et en raison inverse de l'épaisseur de la lame isolante.

Lorsque l'armature extérieure communique avec le sol, son potentiel est nul, et l'on a

$$M_1 = \frac{V_1 S_1}{4\pi e}.$$

Cette expression est la même que pour un condensateur formé d'une sphère entourée par un condensateur sphérique concentrique non isolé. Nous avons vu en effet (152) que le potentiel V_1 de la sphère est donné par l'expression

$$V_1 = \frac{M_1}{R_1} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_2};$$

on en déduit

$$M_1 = \frac{V_1 4\pi R_1^2}{4\pi(R_2 - R_1)} \times \frac{R_2}{R_1}.$$

$$M_1 = \frac{V_1 S_1}{4\pi e} \times \frac{R_1 + (R_2 - R_1)}{R_1} = \frac{V_1 S_1}{4\pi e}\left(1 + \frac{e}{R_1}\right),$$

et cette formule se réduit à celle qui a été obtenue précédemment, quand on néglige le rapport $\frac{e}{R_1}$ devant l'unité.

171. On peut d'ailleurs, pour une bouteille de forme quelconque et d'épaisseur constante, obtenir une expression plus approchée de la charge, analogue à celle du condensateur sphérique.

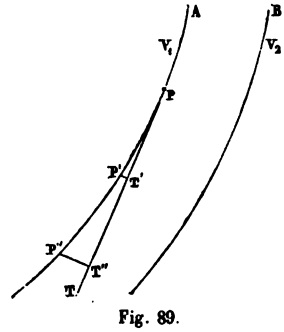


Fig. 89.

Quand on passe de l'armature intérieure A (fig. 89) à l'armature extérieure B, le potentiel varie d'une manière continue de V_1 à V_2. On peut considérer V_2 comme une fonction de l'épaisseur normale e du milieu isolant et des dérivées du potentiel dans la couche isolante; en limitant le développement aux termes du second ordre, il vient

$$(1) \qquad V_2 = V_1 + e\frac{dV}{dn} + \frac{e^2}{2}\frac{d^2V}{dn^2}.$$

En un point P de la surface du conducteur A, menons trois axes rectangulaires, l'un suivant la normale, et les deux autres (x et y) tangents aux deux sections principales de la surface. La densité électrique étant nulle dans le milieu isolant, on a toujours $\Delta V = 0$, ou

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dn^2} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d^2V}{dn^2} = -\left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2}\right).$$

Soit PP'' la section principale de la surface parallèle à l'axe des x, et PT la tangente; considérons sur cette droite deux points T' et T'' infiniment voisins dont les distances au point P sont ∂x et $2\partial x$, et appelons V' et V'' les potentiels en ces deux points; on a

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\partial\dfrac{\partial V}{\partial x}}{\partial x} = \frac{(V'' - V') - (V' - V_1)}{(\partial x)^2} = \frac{V'' - 2V' + V_1}{(\partial x)^2}.$$

Les perpendiculaires T'P', T''P'' menées jusqu'à la rencontre de

la courbe ont sensiblement pour expressions, en désignant par R le rayon de courbure de la section principale considérée,

$$T'P' = \frac{(\partial x)^2}{2R}, \quad T''P'' = \frac{4(\partial x)^2}{2R}.$$

Pour ces points T′ et T″ infiniment voisins de la surface, on peut borner le développement (1) aux deux premiers termes, ce qui donne

$$V' - V_1 = T'P' \times \frac{dV}{dn},$$

$$V'' - V_1 = T''P'' \times \frac{dV}{dn}.$$

On en déduit

$$V'' - 2V' + V_1 = (T''P'' - 2T'P') \frac{dV}{dn} = \frac{(\partial x)^2}{R} \frac{dV}{dn},$$

et, par suite,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{R} \frac{dV}{dn}.$$

On obtiendrait de même, en considérant l'autre section principale dont le rayon de courbure est R′,

$$\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{1}{R'} \frac{dV}{dn}.$$

Il en résulte

$$\frac{d^2V}{dn^2} = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \frac{dV}{dn}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$V_2 - V_1 = e \frac{dV}{dn} \left[1 - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right].$$

Si l'on fait encore $V_2 = 0$, il reste finalement, en remplaçant $\frac{dV}{dn}$ par $-4\pi\mu$,

$$V_1 = 4\pi\mu e \left[1 - \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right],$$

'où, au même degré d'approximation,

$$\mu = \frac{V_1}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right].$$

Cette expression, qui donne la densité au point P de l'armature :n fonction de l'épaisseur de la lame isolante, est la même que :elle qui a été obtenue pour la sphère. La charge M_1 de l'arma-ure est égale $\int \mu d\sigma$. Si l'épaisseur est constante et si la surface :st telle que la somme des inverses des rayons de courbure soit la même en tous les points, cette charge sera

$$M_1 = \int \mu d\sigma = \frac{V_1 S_1}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right].$$

La capacité de la bouteille a donc pour expression

$$C_1 = \frac{S_1}{4\pi e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right].$$

172. Pour calculer la force condensante, il faudrait connaître la capacité électrique C de l'armature A supposée seule, ce qui est en général un problème très-difficile. On aurait alors

$$\mathcal{F} = \frac{S_1}{4\pi C}\frac{1}{e}\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right].$$

On voit que, comme première approximation, la force condensante est en raison inverse de l'épaisseur de la lame isolante. Cette force condensante dépend de la forme de la surface; elle est maximum pour un condensateur sphérique, parce que la sphère est le corps qui, à surface donnée, a la moindre capacité électrique.

On peut remarquer d'ailleurs que, dans la pratique, la force condensante ne présente pas en général un grand intérêt; ce qui importe surtout, c'est la quantité totale d'électricité que l'on peut accumuler sur un appareil de condensation et, quand la lame isolante est d'épaisseur constante, la charge totale ne dépend que de l'étendue de la surface et de l'épaisseur du milieu isolant.

Comme la sphère est de tous les corps qui ont même volume celui dont la surface est minimum, il y a même avantage à donner aux bouteilles de Leyde des formes différentes de la sphère, à employer par exemple des bocaux cylindriques. On augmente ainsi la quantité d'électricité, en même temps que les appareils sont plus faciles à construire et à manier.

173. **Condensateurs cylindriques.** — On peut d'ailleurs faire le calcul d'une manière à peu près complète pour le cas des condensateurs cylindriques, au moins lorsque la longueur des cylindres est indéfinie, ce qui correspond pour la pratique au cas de cylindres très-longs par rapport à leurs diamètres.

Si l'on considère plusieurs cylindres conducteurs parallèles et indéfinis électrisés, il est clair que, par raison de symétrie, la densité est constante en tous les points d'une génératrice de l'un quelconque des cylindres, lorsque l'équilibre a lieu; les surfaces de niveau sont elles-mêmes cylindriques, et la distribution de l'électricité est la même sur tous les plans perpendiculaires à ces cylindres. Il suffit donc de déterminer la condition d'équilibre dans un de ces plans.

Évaluons pour cela l'action exercée en un point P (fig. 90), sur une masse électrique égale à 1, par une bande étroite comprise entre deux génératrices infiniment voisines AB et A'B'. Menons par le point P un plan perpendiculaire à ces génératrices, et joignons ce point au milieu O de l'arc ds compris entre les génératrices. L'action de cette bande est évidemment dirigée suivant PO; il suffit pour l'évaluer de faire la somme des composantes parallèles à PO de toutes les actions élémentaires.

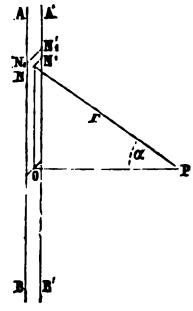


Fig. 90.

L'action en P de la masse électrique comprise entre deux parallèlles NN' et $N_1N'_1$, situées à des distances y et $y + dy$ du point O est, en appelant μ la densité électrique sur la surface,

$$-\mu \frac{ds dy}{r^2},$$

et la composante parallèle à PO est, en appelant ρ la distance PO,

$$-\mu\frac{ds\,dy}{r^2}\times\frac{\rho}{r}=-\mu\rho\,ds\frac{dy}{r^3}.$$

On a d'ailleurs, en désignant par α l'angle NPO,

$$y=\rho\,tg\,\alpha,\qquad r=\frac{\rho}{\cos\alpha},$$

$$dy=\frac{\rho}{\cos^2\alpha}\,d\alpha,$$

ce qui donne, en substituant,

$$\mu\rho\,ds\frac{dy}{r^3}=\frac{\mu\,ds}{\rho}\cos\alpha\,d\alpha.$$

La résultante est donc, pour une bande de longueur indéfinie,

$$-\frac{\mu\,ds}{\rho}\int\cos\alpha\,d\alpha=\frac{\mu\,ds}{\rho}\Big(\sin\alpha\Big)_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}=\frac{2\mu\,ds}{\rho}.$$

L'équilibre électrique est donc le même que si, dans le plan considéré perpendiculaire aux cylindres, les actions électriques étaient simplement en raison inverse de la distance, la densité électrique sur la courbe d'intersection de ce plan avec un cylindre étant double de la densité correspondante sur la surface.

174. La force électrique $\frac{2\mu\,ds}{\rho}$ au point P étant égale et de signe contraire à la dérivée du potentiel, le potentiel a pour expression, à une constante près,

$$V=-2\mu\,ds\,l.\,\rho=2\mu\,ds\,l.\,\frac{1}{\rho},$$

le signe $l.$ indiquant des logarithmes népériens.

Si la lame considérée a une longueur égale à L, la quantité d'électricité m qu'elle possède est

$$m=L\mu\,ds,$$

et, si cette longueur L est suffisamment grande par rapport à la

distance ρ, pour que l'action des portions plus éloignées soit négligeable, on peut écrire

$$V = 2\frac{m}{L} l.\frac{1}{\rho} = \frac{m}{L} l.\frac{1}{\rho^2}.$$

D'ailleurs, si l'on prend pour axe des z une parallèle aux arêtes des génératrices, l'équation générale d'équilibre

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

se réduit à

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0,$$

et cette condition est satisfaite par une fonction logarithmique, comme celle que nous avons indiquée, ou une somme de fonctions de même forme.

Pour un cylindre circulaire droit de rayon R dont la densité électrique est la même en tous les points, le potentiel sur l'axe est la somme des potentiels de toutes les bandes dans lesquelles on peut décomposer la surface totale ; on a donc, en désignant par M la quantité totale d'électricité et par L la longueur du cylindre,

$$V = \frac{2M}{L} l.\frac{1}{R} = \frac{M}{L} l.\frac{1}{R^2}.$$

175. Considérons enfin deux cylindres concentriques, l'un de rayon R_1 et l'autre de rayon intérieur R_2, le premier étant au même potentiel V que précédemment et chargé d'une quantité + M d'électricité, le second en communication avec le sol. Ce dernier sera chargé par influence sur sa face interne d'une quantité d'électricité — M égale et contraire à la précédente. Le potentiel sur l'axe commun est

$$V = \frac{2M}{L} l.\frac{1}{R_1} - \frac{2M}{L} l.\frac{1}{R_2} = \frac{2M}{L} l.\frac{R_2}{R_1},$$

d'où l'on tire

$$M = \frac{VL}{2} \frac{1}{l.\dfrac{R_2}{R_1}}.$$

On peut vérifier que cette expression se ramène à la formule générale des condensateurs fermés à armatures très-rapprochées. Désignant par e la distance des deux surfaces supposée très-petite, on a, en bornant le développement de la formule des logarithmes aux premiers termes,

$$l.\frac{R_2}{R_1}=l.\left(1+\frac{e}{R_1}\right)=\frac{e}{R_1}-\frac{1}{2}\left(\frac{e}{R_1}\right)^2=\frac{e}{R_1}\left(1-\frac{e}{2R_1}\right),$$

et la surface totale S du cylindre intérieur est

$$S=2\pi R_1 L.$$

On en déduit

$$M=\frac{VS}{4\pi e\left(1-\frac{e}{2R_1}\right)}=\frac{VS}{4\pi e}\left(1+\frac{e}{2R_1}\right);$$

c'est l'expression de la charge électrique d'un condensateur fermé.

176. On peut encore traiter le cas d'un condensateur formé de deux cylindres conducteurs dont l'un est intérieur à l'autre, mais qui ne sont pas concentriques.

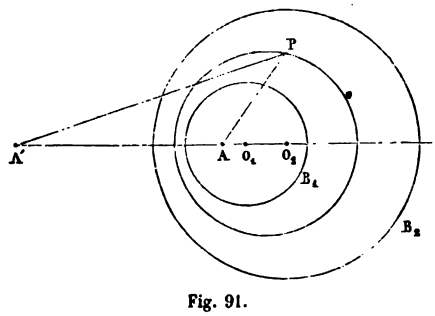


Fig. 91.

Considérons deux droites parallèles de longueur L, chargées de quantités d'électricité égales et de signes contraires + M et — M, distribuées sur chacune d'elles d'une manière uniforme. Menons un plan perpendiculaire à ces droites, qui coupe la première en A (fig. 91) et la seconde en A'. Le potentiel, au point P de ce plan, a pour expression

$$V=\frac{M}{L}l.\frac{1}{\overline{PA}^2}-\frac{M}{L}l.\frac{1}{\overline{PA'}^2}=\frac{M}{L}l.\frac{\overline{PA'}^2}{\overline{PA}^2}.$$

Les courbes de niveau dans le plan considéré sont déterminées par la condition

$$\frac{PA'}{PA}=\text{const.};$$

ce sont des circonférences de cercle intérieures les unes aux autres, mais non concentriques. Les surfaces de niveau sont donc des cylindres parallèles excentriques.

Posons, pour simplifier,

$$v = \frac{VL}{M};$$

et prenons pour axes de coordonnées la droite A'A et une perpendiculaire au milieu de la distance des deux points A et A', distance que nous représenterons par $2a$.

La circonférence qui correspond au potentiel V a pour équation

$$\frac{VL}{M} = v = l.\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}, \tag{1}$$

ou bien

$$e^v[(x-a)^2+y^2] = (x+a)^2+y^2,$$

e étant la base des logarithmes népériens; le rayon de ce cercle est donné par la formule

$$R^2 = a^2\left(\frac{e^v+1}{e^v-1}\right)^2 - a^2, \tag{2}$$

et l'abscisse du centre est

$$x = a\frac{e^v+1}{e^v-1} = \sqrt{R^2+a^2}. \tag{3}$$

L'équation (2) donne

$$e^v = \frac{\sqrt{R^2+a^2}+a}{\sqrt{R^2+a^2}-a} = \frac{(a+\sqrt{R^2+a^2})^2}{R^2},$$

$$v = 2l.\frac{a+\sqrt{R^2+a^2}}{R}.$$

Si l'on considère deux circonférences B_1 et B_2, dont les rayons sont R_1 et R_2, la distance O_1O_2 des deux centres est

$$x_2 - x_1 = \sqrt{R_2^2+a^2} - \sqrt{R_1^2+a^2} = d. \tag{4}$$

Cette équation, résolue par rapport à a, donne

$$4d^2a^2=(R_2^2-R_1^2-d^2)^2-4d^2R_1^2,$$

ou

$$la=\sqrt{(R_1+R_2+d)\,(R_1+R_2-d)\,(R_2-R_1+d)\,(R_2-R_1-d)}.$$

On déduit encore de l'équation (4)

$$(5)\qquad \begin{cases} \sqrt{R_1^2+a^2}=\dfrac{R_2^2-R_1^2-d^2}{2d}, \\ \sqrt{R_2^2+a^2}=\dfrac{R_2^2-R_1^2+d^2}{2d}. \end{cases}$$

La différence des valeurs de v pour les deux circonférences est

$$v_1-v_2=2l.\frac{a+\sqrt{R_1^2+a^2}}{R_1}-2l.\frac{a+\sqrt{R_2^2+a^2}}{R_2}$$
$$=2l.\frac{R_2}{R_1}\times\frac{a+\sqrt{R_1^2+a^2}}{a+\sqrt{R_2^2+a^2}},$$

ou, en remplaçant les radicaux par leurs valeurs tirées des équations (5),

$$v_1-v_2=2l.\frac{R_2}{R_1}.\frac{R_2^2-R_1^2-d^2+2da}{R_2^2-R_1^2+d^2+2da};$$

par suite,

$$V_1-V_2=\frac{M}{L}(v_1-v_2)=\frac{2M}{L}l.\frac{R_2}{R_1}\times\frac{R_2^2-R_1^2-d^2+2da}{R_2^2-R_2^2+d^2+2da},$$

et il suffira de remplacer dans cette équation le terme $2da$ par sa valeur, pour que la différence des potentiels soit exprimée en fonctions des rayons R_1 et R_2 des deux circonférences et de la distance de leurs centres. Pour le problème électrique réel, cela signifie que la différence des potentiels sur deux surfaces cylindriques de niveau est exprimée en fonction des rayons des cylindres et de la distance de leurs axes.

Remarquons maintenant que la droite électrisée qui se projette au point A est située dans l'intérieur de toutes les surfaces de niveau, et que la droite A′ est à l'extérieur de toutes ces surfaces.

On peut donc, d'après le théorème X (168), sans changer l'équilibre et sans modifier la loi des potentiels dans la région située entre les deux cylindres de rayon R_1 et R_2, distribuer la masse $+M$ d'une manière convenable à la surface du cylindre de rayon R_1, et la masse $-M$ sur le cylindre de rayon R_2. Le nouvel état d'équilibre correspondra au cas où un cylindre conducteur de rayon R_1 communiquant avec une source au potentiel V_1 serait entouré par un autre cylindre de rayon intérieur R_2 maintenu au potentiel V_2.

En désignant par V la différence des deux potentiels, on aura donc

$$(6) \qquad V = \frac{2M}{L} l. \frac{R_2}{R_1} \times \frac{R_2^2 - R_1^2 - d^2 + 2da}{R_2^2 - R_1^2 + d^2 + 2da}.$$

La capacité électrique C du condensateur formé par ces deux cylindres est donnée par l'équation

$$\frac{1}{C} = \frac{2}{L} l. \frac{R_2}{R_1} \times \frac{R_2^2 - R_1^2 - d^2 + 2da}{R_2^2 - R_1^2 + d^2 + 2da}.$$

Si les cylindres sont concentriques, la distance d est nulle, l'équation (6) se réduit à

$$V = \frac{2M}{L} l. \frac{R_2}{R_1},$$

et l'on retrouve la formule connue.

177. Pour passer du cas général à celui d'un seul cylindre situé à une certaine distance d'un plan indéfini, on remplacera l'excentricité d par sa valeur en fonction du rayon R_2 du plus grand cylindre et de la plus courte distance δ du centre du plus petit à la surface du plus grand, d'après la relation

$$d + \delta = R_2,$$

et l'on cherchera la limite de l'équation (6), dans laquelle on fera R_2 infini. Dans ce cas, le terme $2da$ devient égal à $2R_2\sqrt{\delta^2 - R_1^2}$, et il vient

$$V = \frac{2M}{L} l. \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - R_1^2}}{R_1}.$$

Si la distance δ est très-grande par rapport au rayon R_1 du cylindre, ce qui conviendra par exemple au cas d'un fil télégraphique maintenu à une certaine distance au-dessus du sol, il reste simplement

$$V = \frac{2M}{L} l . \frac{2\delta}{R_1},$$

et

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{L} l . \frac{2\delta}{R_1}.$$

La capacité électrique d'un fil placé dans ces conditions est donc la même que s'il était entouré d'une enveloppe cylindrique concentrique dont le rayon serait double de la hauteur à laquelle se trouve le fil (1).

Enfin, tous ces résultats sont relatifs, comme nous l'avons dit, au cas de cylindres indéfinis, et ne peuvent être appliqués que d'une manière approchée aux expériences réelles.

178. **Condensateurs plans.** — Un condensateur à plateaux se compose de deux lames de métal parallèles séparées par une couche de matière isolante. Dans la pratique, ces condensateurs ont nécessairement une étendue limitée, et le problème de la distribution de l'électricité présente de grandes difficultés, surtout pour les points voisins du contour. Mais, si la distance des armatures de ce condensateur est très-petite par rapport à leur diamètre, on pourra considérer chacune d'elle comme faisant partie d'un plan indéfini, et les charges électriques, ainsi calculées, différeront extrêmement peu des charges réelles.

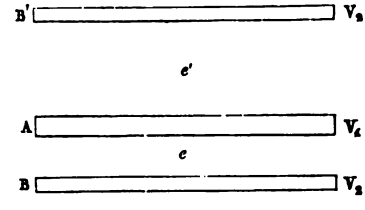


Fig. 92.

Soit donc A (fig. 92) une plaque conductrice indéfinie au potentiel V_1, B et B′ deux plaques conductrices parallèles à la première, situées de part

(1) Le problème des cylindres excentriques a été résolu par M. Blavier, à propos de certaines expériences de M. Gaugain. (*Journal de Physique*, t. III, p. 115 et 151.) Voir plusieurs articles de M. Blavier, sur les grandeurs électriques et leur mesure en unités absolues, dans les *Annales télégraphiques*, 3e série, t. I et II.

et d'autre, l'une à une distance e, l'autre à une distance e', et maintenues au même potentiel V_2. Il est clair que la densité électrique est uniforme sur chacune des surfaces, que les orthogonales aux surfaces de niveau sont des droites parallèles entre elles et perpendiculaires aux surfaces considérées, et que, par suite, la densité est la même sur deux surfaces placées en regard l'une de l'autre. La densité μ sur la surface inférieure du conducteur A est donnée (163) par l'équation

$$4\pi\mu = -\frac{dV}{dn} = -\frac{V_2 - V_1}{e} = \frac{V_1 - V_2}{e}.$$

On a de même, pour la face supérieure,

$$4\pi\mu' = \frac{V_1 - V_2}{e'}.$$

La charge totale M que possède une étendue limitée S du conducteur A est donc

$$M = S(\mu + \mu') = \frac{(V_1 - V_2)S}{4\pi}\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e'}\right)$$
$$= \frac{VS}{4\pi e}\left(1 + \frac{e}{e'}\right),$$

V désignant la différence des deux potentiels.

Si le conducteur B′ est très-éloigné, ce qui correspond au cas d'un condensateur formé de deux plateaux, il reste simplement

$$M = \frac{VS}{4\pi e},$$

c'est-à-dire la même formule que pour la bouteille de Leyde. La charge électrique d'un condensateur à plateaux et la force condensante sont donc sensiblement en raison inverse de la distance des armatures, et cette relation sera d'autant plus exacte que les surfaces seront plus voisines.

179. **De l'influence électrique en général. Méthode de Murphy.** — Tous les calculs qui précèdent se rapportent à des cas particuliers du problème général de l'influence électrique.

Considérons un conducteur A isolé et chargé d'une certaine quantité d'électricité + M, dans le voisinage duquel se trouve un

conducteur B en communication avec le sol. On peut se proposer de déterminer quelle est la charge du conducteur B, le potentiel du premier conducteur A, et enfin la loi de distribution des couches électriques lorsque l'équilibre est atteint.

Remarquons d'abord qu'un corps électrisé peut toujours être considéré comme entouré complétement par un conducteur en communication avec le sol ; ce conducteur sera formé par les parois de la salle si l'on opère dans une chambre ordinaire, ou simplement par la surface du sol et les objets de toutes formes dont elle est couverte.

Si le corps électrisé est réellement entouré par un conducteur, comme les parois d'une salle, ce conducteur se charge d'une quantité égale d'électricité contraire, et les éléments correspondants sur le corps électrisé et sur l'enveloppe, chargés de quantités égales et de signes contraires, sont déterminés par un canal orthogonal. Le conducteur B, en particulier, qui fait partie de l'enceinte ne sera rencontré que par une partie des orthogonales partant du corps électrisé et, par suite, la charge négative — M' de ce conducteur sera plus petite que la charge positive du corps influent.

Si le corps électrisé est placé en plein air, la couche est surtout distribuée vers la partie inférieure de sa surface; la plupart des orthogonales que l'on peut tracer à partir de ce corps rencontrent le sol à petite distance, celles qui se dirigent vers la partie supérieure se recourbent bientôt et retrouvent, plus ou moins loin, ou le sol ou un conducteur en communication avec le sol.

On voit par là le sens qu'il faut attribuer à cette opinion de Faraday qu'il ne se produit jamais une quantité donnée d'électricité positive sans qu'il y ait quelque part une quantité égale d'électricité négative produite en même temps, ces deux quantités égales et de signes contraires étant reliées par des lignes de force.

180. Considérons d'abord le cas où l'électricité influente + M est formée de masses fixes, distribuées par exemple en différents points d'un corps absolument isolant, et supposons qu'on ait déterminé la quantité — M' d'électricité contraire que prend le conducteur B en communication avec le sol, et par suite au potentiel zéro. Pour obtenir l'état électrique que prendrait le conducteur

s'il eût été primitivement isolé à l'état neutre, il suffit d'appliquer sur ce conducteur une couche égale à $+M'$ distribuée d'une manière régulière ; la densité en chaque point sera la somme algébrique des densités relatives aux deux couches $-M'$ et $+M'$. La charge totale de ce conducteur est nulle et l'équilibre existe, puisque l'électricité influente et la couche $-M'$ avaient sur le conducteur un potentiel nul, et que la couche $+M'$ a un potentiel constant.

Si le conducteur B était isolé et primitivement chargé d'une quantité M_1 d'électricité, il suffira encore, pour trouver l'équilibre, d'ajouter à la charge $-M'$ produite par influence, une couche de masse $M_1 + M'$ distribuée normalement.

Enfin, si l'on connaît séparément les états d'équilibre qui correspondent à l'influence de deux systèmes M et N de masses fixes, on obtiendra l'état électrique dû à l'influence du système $M+N$ en superposant les couches électriques correspondant aux deux états d'équilibre précédents.

181. Si le corps influent est lui-même conducteur, ce qui est le cas le plus général, le problème devient plus difficile encore parce qu'il est nécessaire de tenir compte de la réaction exercée sur le corps influent par l'électricité du corps influencé. La méthode suivante d'approximations successives due à R. Murphy (1) permet de traiter un certain nombre de questions.

Supposons que l'on veuille trouver l'état d'équilibre de deux conducteurs isolés A et B et chargés primitivement de quantités d'électricité données M_1 et M_2. Soit m la couche de niveau qui, répandue sur A, y produit un potentiel égal à 1 ; cette couche, supposée fixe, développera par influence sur B communiquant avec le sol une couche $-m'$. La couche $-m'$, supposée fixe, développera à son tour sur le conducteur A non isolé une couche m_1 ; celle-ci supposée fixe, donnera de même sur le conducteur B non isolé une couche $-m'_1$, et ainsi de suite indéfiniment. Superposant ces diverses couches, nous aurons sur A une couche égale à

$$M = m + m_1 + m_2 + \ldots.$$

(1) *Phil. Mag.*, II, p. 350 (1833).

et sur B une couche

$$-M' = -m' - m'_1 - m'_2 - \ldots.$$

On voit aisément que le potentiel est égal à 1 sur le conducteur A et à zéro sur le conducteur B; par suite il y a équilibre.

De même, soit n la couche de niveau qui répandue sur B y produit un potentiel égal à 1. Cette couche supposée fixe donnera par influence sur le conducteur A non isolé une couche $-n'$; celle-ci donnera de même sur B non isolé une couche n_1, laquelle donnera sur A une couche $-n'_1$, et ainsi de suite indéfiniment. Les deux couches

$$N = n + n_1 + n_2 + \ldots,$$
$$-N' = -n' - n'_1 - n'_2 - \ldots,$$

répandues sur B et A ont un potentiel égal à 1 sur B et égal à zéro sur A et, par conséquent, constituent un nouvel état d'équilibre.

Concevons maintenant que l'on multiplie la densité en chaque point dans le premier état d'équilibre par V_1, et la densité en chaque point dans le second état par V_2, les quantités V_1 et V_2 satisfaisant aux équations

$$V_1 M - V_2 N' = M_1,$$
$$-V_2 M' + V_2 N = M_2,$$

et que l'on superpose les deux nouveaux états d'équilibre ainsi obtenus, on aura l'état d'équilibre réciproque des deux quantités d'électricité données M_1 et M_2 répandus sur A et B. Le potentiel de l'ensemble aura les valeurs constantes V_1 sur A et V_2 sur B, valeurs que l'on peut déduire des deux équations qui précèdent. Si l'on se donnait les potentiels V_1 et V_2 des deux conducteurs, les mêmes équations détermineraient les couches M_1 et M_2.

182. **Travail des forces électriques.** — Lorsqu'un système de corps conducteurs électrisé est mis en communication avec le sol, toute l'électricité libre disparaît, le système revient à l'état neutre et au potentiel zéro. Si ces conducteurs restent isolés du sol pendant qu'on les fait communiquer entre eux, la distri-

bution générale de l'électricité se modifie et tous les conducteurs prennent le même potentiel. En général, lorsque, pour une cause quelconque, il y a déplacement des fluides électriques ou mouvement des corps électrisés eux-mêmes, ce changement dans l'état du système est accompagné d'un travail des forces électriques.

Entre deux masses électriques m et m' la force est $\frac{mm'}{r^2}$ et, quand la distance de ces deux masses varie de δr, le travail de la force est

$$\frac{mm'}{r^2}\delta r = -\delta\frac{mm'}{r}.$$

La variation totale $\delta\mathfrak{T}$ du travail électrique qui correspond à un changement d'état du système est

$$\delta\mathfrak{T} = -\Sigma\delta\frac{mm'}{r} = -\delta\Sigma\frac{mm'}{r},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les combinaisons des masses électriques deux à deux.

Posons

$$W = \Sigma\frac{mm'}{r},$$

il vient

$$\delta\mathfrak{T} = -\delta W,$$

et, quand le système passe de l'état 1 à l'état 2, le travail des forces électriques est

$$\mathfrak{T} = -(W_2 - W_1) = W_1 - W_2.$$

185. **Energie électrique.** — La valeur de la fonction W, dans un état quelconque du système, est le travail que développeraient les forces électriques, si le système revenait à l'état neutre ; car on aurait, dans ce cas, $W_2 = 0$, et par suite $\mathfrak{T} = W_1$. Le système revenant de lui-même à l'état neutre quand on le met en communication avec le sol, on en conclut que la quantité W est toujours positive. On l'appelle, par analogie avec les fonctions que l'on étudie dans la théorie mécanique de la chaleur, *énergie*

potentielle du système électrisé, ou simplement *énergie électrique*.

Inversement, pour électriser un système par le jeu d'une machine électrique, il faut dépenser une quantité de travail moteur égale à l'énergie potentielle qu'on veut lui communiquer. En général, le travail des forces électriques pour un changement quelconque, est égal à la variation qu'éprouve l'énergie potentielle quand on passe du premier état au second.

184. On peut exprimer l'énergie potentielle W d'un système à l'aide de la fonction V c'est-à-dire du potentiel en chacun des points du système. La somme

$$W = \Sigma \frac{mm'}{r}$$

renferme les combinaisons de toutes les masses élémentaires deux à deux.

Les combinaisons d'une masse déterminée m avec toutes les autres sont

$$m\left(\frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} + \frac{m'''}{r'''} + \ldots\right) = m\Sigma\frac{m'}{r'},$$

r', r'', r''',... étant les distances de toutes les autres molécules à la première. L'expression $\Sigma\frac{m'}{r'}$ n'est autre chose que le potentiel V_m de toutes les masses électriques au point où se trouve la masse considérée m, de sorte que la somme de toutes les combinaisons qui renferment la masse m a pour expression mV_m. De même, les combinaisons d'une masse m' avec chacune des autres donneraient $m'V_{m'}$, et ainsi de suite; la somme totale de ces combinaisons serait

$$mV_m + m'V_m + \ldots = \Sigma mV.$$

Mais, en opérant de cette manière, on a répété chaque combinaison deux fois; par exemple, le terme $\frac{mm'}{r'}$, relatif à la combinaison des deux masses m et m', est entré une première fois dans la somme partielle mV_m et une seconde fois dans $m'V_{m'}$. L'énergie potentielle est donc égale à la moitié de cette somme,

ce qui donne

$$W = \frac{1}{2}\Sigma mV. \qquad (1)$$

185. Considérons un système de conducteurs A_1, A_2, A_3,... sur lesquels sont répandues des masses électriques M_1, M_2, M_3,... L'équilibre électrique étant établi, le potentiel a une valeur constante dans chacun des conducteurs, V_1 pour le premier A_1, V_2 pour A_2...

Dans la somme ΣmV, les termes qui se rapportent aux différentes masses électriques répandues sur le corps A_1 donnent une somme partielle $V_1 \Sigma m = V_1 M_1$; de même, les termes relatifs à A_2 donnent $V_2 M_2$,... etc., et la relation (1) devient :

$$W = \frac{1}{2}(V_1 M_1 + V_2 M_2 + \ldots). \qquad (2)$$

Remarquons que si l'un des conducteurs est resté isolé pendant qu'on a électrisé le système, ce corps n'est électrisé que par influence et contient des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative ; sa charge totale M est nulle, ainsi que le terme correspondant MV de l'énergie électrique. Ainsi les conducteurs isolés ne dépensent aucun travail pendant la charge et n'en produisent point pendant la décharge; toutefois il ne serait pas exact d'en conclure que ces conducteurs n'interviennent pas dans le phénomène, car leur présence peut influer sur la charge que prennent les autres conducteurs de manière à augmenter le travail dépensé et produit; nous en verrons un exemple dans la disposition des batteries en cascade.

Si l'un des corps communique constamment avec la terre, la terre et ce corps réunis seront regardés comme faisant partie du système; à cause des grandes dimensions du globe terrestre, le potentiel ou du moins le changement de potentiel dû aux masses électriques mises en jeu y sera sensiblement nul. La quantité d'électricité produite par influence sur ce conducteur ayant une valeur finie, le terme correspondant de l'énergie sera encore nul.

Il est clair que la quantité de travail nécessaire pour communiquer à un corps une charge électrique donnée est minimum

lorsque le corps est parfaitement conducteur ; car, si l'on imagine une autre distribution à l'aide de résistances intérieures, telles que celles qui existent dans les corps imparfaitement conducteurs, et si l'on suppose ensuite que ces résistances diminuent peu à peu, le fluide reviendra à la première distribution, en surmontant les résistances et, par conséquent, accomplissant un travail positif.

186. **Décharge d'une bouteille de Leyde.** — Considérons une bouteille de Leyde à armatures fermées. Nous avons vu (170) qu'en nous bornant à une première approximation et en supposant l'épaisseur de la lame isolante constante et très-petite, la quantité d'électricité répandue sur l'armature intérieure est

$$M = \frac{VS}{4\pi e},$$

V étant le potentiel de la souree en communication avec l'armature intérieure, et l'armature extérieure étant en relation avec le sol, c'est-à-dire au potentiel zéro.

En désignant par C le rapport $\frac{S}{4\pi e}$ qui est une constante pour une bouteille donnée et représente sa capacité électrique, on a

$$V = \frac{M}{C};$$

la quantité d'énergie que renferme cette bouteille est

$$W = \frac{1}{2} VM = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C},$$

ou

$$W = \frac{1}{2} CV^2.$$

Ainsi *l'énergie électrique d'une bouteille de Leyde est proportionnelle au carré de la charge ou bien au carré du potentiel de la source.*

Cette énergie se manifeste lorsqu'on réunit les deux armatures par un excitateur, la bouteille se décharge complétement

et il y a production d'une quantité de travail $\frac{1}{2}\frac{M^2}{C}$; ce travail se traduit par une étincelle et par un échauffement des différentes parties du corps qui établit une communication entre les armatures. Une partie de l'énergie électrique est employée à vaincre la résistance de l'air, c'est-à-dire à produire l'étincelle ; le reste se change en énergie calorifique.

Quand les armatures communiquent par un fil de métal gros et court, l'étincelle est énergique et l'échauffement du conducteur très-faible. Quand le fil est long et fin, l'étincelle est faible, mais le fil s'échauffe d'avantage. En général l'énergie est dépensée en plus grande quantité aux points ou la résistance à vaincre est plus grande.

Si l'on réunit les deux armatures par un fil très-long et très-fin, l'étincelle devient très-faible et le travail correspondant négligeable. La quantité de chaleur dégagée dans le fil est alors proportionnelle au carré de la charge de la bouteille. Cette loi a été découverte experimentalement par M. Riess.

187. **Décharge des batteries.** — Considérons une batterie formée de n bouteilles identiques dont les armatures extérieures communiquent toutes avec le sol. Si l'on charge toutes ces bouteilles séparément avec une même source, on établira sur chacune des armatures intérieures le même potentiel V et la charge m, tels qu'on ait

$$V = \frac{m}{c},$$

c étant la capacité électrique de chaque bouteille.

Si l'on réunit toutes les armatures intérieures, l'équilibre subsiste, puisque le potentiel est le même partout et que les bouteilles n'exercent aucune action les unes sur les autres. La charge totale est la même que si la batterie avait été mise directement en relation avec la source.

L'énergie de la batterie est égale à la somme des énergies de chaque bouteille, c'est-à-dire

$$W = \frac{1}{2} nVm = \frac{1}{2} Vnm = \frac{1}{2} VM,$$

M désignant la charge totale de la batterie.

Ainsi, *une batterie formée de* n *bouteilles identiques est équivalente à une bouteille unique de même épaisseur dont la surface serait* n *fois plus grande*, c'est-à-dire *égale à la somme des surfaces de toutes les bouteilles qui la composent.*

On en déduit encore

$$W = \frac{1}{2}\frac{m}{c}nm = \frac{1}{2c}\frac{(nm)^2}{n} = \frac{1}{2c}\frac{M^2}{n}.$$

Donc, *pour une batterie formée de bouteilles identiques, l'énergie électrique est proportionnelle au carré de la charge et en raison inverse du nombre des bouteilles.*

Cette loi est conforme à celle que M. Riess a trouvée par expérience.

En remplaçant c par sa valeur $\frac{s}{4\pi e}$ relative à chaque bouteille et désignant par S la surface totale ns de la batterie, on a

$$W = \frac{1}{2}\frac{4\pi e}{s}\frac{M^2}{n} = \frac{1}{2}\frac{4\pi e}{S}M^2 = \frac{1}{2}\frac{S}{4\pi e}V^2.$$

On voit, d'après cela, que pour une masse électrique donnée, l'énergie est proportionnelle à l'épaisseur de chaque bouteille et en raison inverse de la surface totale. Dans ce cas, il y aurait tout avantage à diminuer le nombre des bouteilles et augmenter l'épaisseur.

Si, au contraire, le potentiel est donné, ce qui est le cas habituel, l'énergie est en raison inverse de l'épaisseur et proportionnelle à la surface totale. Il est avantageux alors de multiplier les bouteilles, parce qu'il sera plus facile de leur donner une faible épaisseur.

188. On peut encore décharger une batterie d'une manière incomplète. Considérons par exemple deux batteries, l'une de n bouteilles et l'autre de n' bouteilles toutes identiques. Chargeons la première à refus, comme à l'ordinaire ; l'énergie potentielle de cette batterie est alors

$$W = \frac{1}{2}nVm = \frac{1}{2c}\frac{M^2}{n}.$$

La deuxième batterie étant à l'état neutre et son armature

extérieure communiquant avec le sol, on réunit les armatures intérieures des deux batteries, la charge nm se répand alors sur les $(n + n')$ bouteilles, et l'on a constitué ainsi une nouvelle batterie dont l'énergie potentielle est

$$W' = \frac{1}{2c}\frac{M^2}{n+n'},$$

$$W' = \frac{n}{n+n'}W.$$

Le travail accompli pendant cette transformation est égal à la diminution $W - W'$ d'énergie potentielle :

$$W - W' = \frac{n'}{n+n'}W = \frac{1}{2c}M^2\,\frac{1}{n\left(\frac{n}{n'}+1\right)}.$$

189. Cette formule ne convient plus si les bouteilles des deux batteries ne sont pas identiques. Soit M_1 la masse totale d'électricité, M et M' celles qui se répandent sur la première et sur la seconde batterie après la décharge incomplète. L'énergie potentielle primitive est toujours, les n bouteilles de la première batterie étant identiques entre elles,

$$W = \frac{1}{2c}\frac{M_1^2}{n}.$$

Soit V' le potentiel sur les armatures intérieures des deux batteries réunies ; on aura pour chaque bouteille de la première batterie

$$\frac{M}{n} = cV' \text{ ou } M = ncV'.$$

En désignant par c' la capacité électrique des bouteilles de la seconde batterie, on aura de même

$$M' = n'c'V';$$

on en déduit

$$M + M' = M_1 = V'(nc + n'c'),$$

$$V' = \frac{M_1}{nc + n'c'}.$$

L'énergie potentielle que renferme encore cette batterie est

$$W' = \frac{1}{2} V' M_1 = \frac{1}{2} \frac{M_1^2}{nc + n'c'}.$$

Le travail dépensé pendant la décharge incomplète est donc

$$W - W' = \frac{M_1^2}{2}\left[\frac{1}{nc} - \frac{1}{nc + n'c'}\right] = \frac{M_1^2}{2n}\frac{c'}{c^2}\frac{1}{\frac{n}{n'} + \frac{c'}{c}}.$$

Désignons par e et s l'épaisseur et la surface de chacune des bouteilles de la première batterie, par e' et s' les quantités analogues pour les bouteilles de la seconde ; on a

$$\frac{c'}{c} = \frac{s'}{4\pi e'} : \frac{s}{4\pi e} = \frac{s'}{s}\frac{e}{e'},$$

ce qui donne

$$W - W' = \frac{1}{2}\frac{M_1^2}{n}\frac{c'}{c^2}\frac{1}{\frac{n}{n'} + \frac{e}{e'}\frac{s'}{s}}.$$

Si les épaisseurs des bouteilles sont égales, il reste

$$W - W' = \frac{1}{2}\frac{M_1^2}{nc}\frac{s'}{s}\frac{1}{\frac{n}{n'} + \frac{s'}{s}},$$

expression identique à celle que M. Riess a obtenue expérimentalement.

190. Etudions enfin la charge par cascade. Considérons plusieurs batteries, une première renfermant n_1 bouteilles, une seconde n_2, une troisième n_3... toutes ces bouteilles étant identiques, et les batteries étant réunies en cascade. L'armature intérieure de la première batterie communique avec une source d'électricité, son armature extérieure communique avec l'armature intérieure de la seconde, et ainsi de suite jusqu'à la dernière batterie dont l'armature extérieure communique avec le sol. Soit M_1 la charge que prend l'armature intérieure de la première batterie, le potentiel de la source étant V_1 ; il se produit par influence une charge $-M_2$ sur l'armature extérieure de la première batterie, une charge $+M_2$ sur l'armature intérieure de la seconde, et

le potentiel du conducteur formé par ces deux armatures est V_1; le conducteur suivant possède de même les charges $-M_2$ et $+M_2$ et son potentiel est V_3, etc.; le potentiel de la dernière armature est nul. On a ainsi, en désignant par c la capacité électrique de chaque bouteille :

pour la 1re batterie. . . . . $M_1 = n_1 c (V_1 - V_2)$
pour la 2e batterie. . . . . $M_2 = n_2 c (V_2 - V_3)$
pour la $p^{ième}$ et dernière. . . . . $M_p = n_p c V_p$.

On en déduit

$$\frac{M_1}{n_1} + \frac{M_2}{n_2} + \ldots + \frac{M_p}{n_p} = cV_1.$$

Si les bouteilles peuvent être considérées comme fermées, les charges électriques développées par influence sur toutes les armatures sont égales, et l'on a

$$M_1 = M_2 = M_3 = \ldots = M_p,$$

ce qui donne

$$M_1 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots \frac{1}{n_p} \right) = cV_1.$$

Si toutes les batteries renferment le même nombre n de bouteilles, la formule devient

$$M_1 \frac{p}{n} = cV_1,$$

ou

$$M_1 = \frac{nc}{p} V_1.$$

On voit, d'après cela, que *la capacité électrique d'une batterie suivie d'un certain nombre de batteries identiques disposées en cascade et en raison inverse du nombre des batteries est proportionnelle au nombre des bouteilles de chaque batterie.*

L'énergie potentielle d'une série de batteries disposées en cascade est

$$W = \frac{1}{2} (V_1 M_1 - V_2 M_2 + V_2 M_2 - \ldots - V_{p-1} M_{p-1} + V_{p-1} M_{p-1}),$$

ou

$$W = \frac{1}{2} V_1 M_1.$$

On aurait pu d'ailleurs écrire cette équation directement, puisque les conducteurs intermédiaires qui restent isolés, et la dernière armature qui communique avec le sol, n'interviennent pas dans l'énergie potentielle.

Si l'on considère les bouteilles fermées et qu'on remplace V_1 par sa valeur, il vient

$$W = \frac{1}{2c} M_1^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_p} \right).$$

Telle est la quantité de travail nécessaire pour charger la batterie et aussi le travail qui sera produit par la décharge.

Si la même quantité d'électricité avait été placée sur la première batterie seulement, le travail eût été

$$W_1 = \frac{1}{2c} M_1^2 \frac{1}{n_1};$$

on en déduit

$$\frac{W}{W_1} = \frac{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_p}}{\frac{1}{n_1}},$$

formule qui se réduit à

$$\frac{W}{W_1} = 1 + \frac{n_1}{n_2}$$

lorsque la cascade est formée seulement de deux batteries. C'est encore une loi que M. Riess avait trouvée par expérience.

191. Ces formules ont des applications importantes.

Lorsque toutes les batteries sont formées du même nombre n de bouteilles et que la première batterie reçoit une charge M, l'énergie potentielle est

$$W = \frac{1}{2c} M^2 \frac{p}{n}.$$

Le travail électrique pour une même quantité d'électricité est

donc proportionnel au nombre des batteries et en raison inverse du nombre de bouteilles ou de la surface de chaque batterie.

La surface totale des bouteilles étant

$$S = pns,$$

on a, en remplaçant c par $\frac{s}{4\pi e}$,

$$V = \frac{1}{2}\frac{4\pi e}{s} M^2 \frac{p}{n} = \frac{1}{2}\frac{4\pi e}{S} M^2 p^2.$$

Ainsi, quand on dispose d'une quantité d'électricité déterminée M et d'un certain nombre de bouteilles dont on constitue des cascades de batteries identiques, le travail électrique est proportionnel au carré du nombre des batteries. Ce travail est donc maximum lorsque toutes les bouteilles sont réunies une à une en cascade.

Si au contraire le potentiel V est déterminé, on a de même pour des batteries égales,

$$W = \frac{1}{2} C V^2 \frac{n}{p} = \frac{1}{2}\frac{s}{4\pi e} V^2 \frac{n}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{4\pi e}\right)\frac{V^2}{p^2}.$$

Le travail est alors en raison inverse du carré du nombre des batteries. Dans ce cas, l'emploi des cascades serait donc défavorable.

CHAPITRE VII

APPLICATIONS DE LA THÉORIE

MÉTHODE DE POISSON.

192. **Distribution de l'électricité sur deux sphères conductrices isolées.** — Le problème de la distribution de l'électricité n'a été résolu d'une manière complète que pour un très-petit nombre d'exemples particuliers. Poisson [1] est le premier qui ait abordé cette question, et il a traité le cas de deux sphères conductrices. Nous ne pouvons pas développer tous les calculs de Poisson, nous nous bornerons à en indiquer la marche générale afin de faire comprendre surtout la signification des tables que nous extrairons de son mémoire.

Soient A et B (fig. 93) deux sphères conductrices dont les

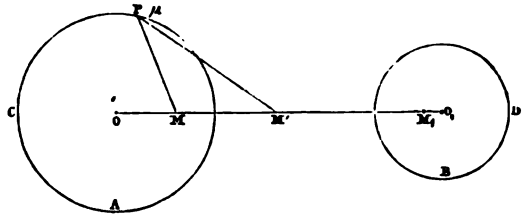


Fig. 93.

centres sont en O et O_1 à une distance c, les rayons a et b, et qui sont chargées respectivement de quantités d'électricité égales à E_a et E_b. L'électricité se porte à la surface de ces sphères et se dis-

[1] *Mémoires de l'Institut* 1811, Ire partie, p. 1.

tribue de telle façon que le potentiel soit constant dans l'intérieur de chacune d'elles; soit $4\pi h$ la valeur du potentiel dans la sphère A et $4\pi g$ sa valeur dans la sphère B.

Comme le système est symétrique par rapport à la ligne des centres, la distribution de l'électricité sera aussi symétrique par rapport à cette même droite. On démontre d'ailleurs que le potentiel d'un corps de révolution est connu en tous les points quand il est déterminé sur l'axe; il suffira donc d'écrire que le potentiel est constant dans chacune des sphères sur le diamètre commun.

Soit x la distance d'un point de l'axe au centre O de la première sphère, désignons par $4\pi\varphi(x)$ le potentiel de la couche E_1 répandue sur cette sphère en un point intérieur et par $4\pi\varphi_1(x)$ le potentiel de cette même couche en un point extérieur; désignons de même par $4\pi F(c-x)$ le potentiel intérieur et par $4\pi F_1(c-x)$ le potentiel extérieur de la couche E_2 répandue sur la deuxième sphère.

Si l'on considère un point M situé dans l'intérieur de la première sphère A, on aura donc

$$\varphi(x)+F_1(c-x)=h, \tag{1}$$

et, pour un point M_1 intérieur à la sphère B, on aura de même, en désignant par x_1 sa distance au point O,

$$\varphi_1(x_1)+F(c-x_1)=g. \tag{2}$$

Les quatre fonctions que renferment ces équations peuvent être réduites à deux. Considérons, en effet, le point M' conjugué du point M par rapport à la sphère A, c'est-à-dire tel que l'on ait

$$OM.OM'=a^2,$$

ou

$$xx'=a^2.$$

Si l'on joint un point quelconque P de cette sphère aux points M et M', on aura

$$\frac{PM'}{PM}=\frac{x'}{a}=\frac{a}{x}.$$

En désignant par μ la densité électrique au point P et par $d\sigma$ un élément de surface, le potentiel au point M de la couche E_s est

$$4\pi\varphi(x)=\int\frac{\mu d\sigma}{PM}.$$

Le potentiel de cette couche en M′ sera de même

$$4\pi\varphi_1(x')=\int\frac{\mu d\sigma}{PM'}.$$

Or, on a

$$\int\frac{\mu d\sigma}{PM'}=\int\frac{PM}{PM'}\cdot\frac{\mu d\sigma}{PM}=\frac{a}{x'}\int\frac{\mu d\sigma}{PM}=\frac{x}{a}\int\frac{\mu d\sigma}{PM}.$$

On en déduit les relations

$$\varphi_1(x')=\frac{a}{x'}\varphi\left(\frac{a^2}{x'}\right), \tag{3}$$

$$\varphi(x)=\frac{a}{x}\varphi_1\left(\frac{a^2}{x}\right). \tag{4}$$

Nous utiliserons la première équation (3) pour éliminer la fonction φ_1 et une équation analogue à (4) appliquée à la sphère B permettra d'éliminer F ; on aura en effet

$$F(c-x_1)=\frac{b}{c-x_1}F_1\left(\frac{b^2}{c-x_1}\right).$$

L'équation (2) devient alors

$$\frac{a}{x_1}\varphi\left(\frac{a^2}{x_1}\right)+\frac{b}{c-x_1}F_1\left(\frac{b^2}{c-x_1}\right)=g. \tag{2}'$$

On peut enfin faire disparaître la fonction F_1 en appliquant cette dernière équation au point M_1 conjugué du point M par rapport à la sphère B ; on aura alors

$$(c-x)(c-x_1)=b^2,$$

d'où

$$x_1=c-\frac{b^2}{c-x}=\frac{c(c-x)-b^2}{(c-x)}.$$

En remplaçant x_1 par cette valeur dans l'équation (2)', il vient

$$\frac{a}{c-\dfrac{b^2}{c-x}}\varphi\left(\frac{a^2}{c-\dfrac{b^2}{c-x}}\right)+\frac{c-x}{b}F_1(c-x)=g.$$

Portant enfin cette valeur de $F_1(c-x)$ dans l'équation (1), on obtient

$$(5)\qquad \varphi(x)-\frac{ab}{c(c-x)-b^2}\varphi\left(\frac{a^2}{c-\dfrac{b^2}{c-x}}\right)=h-g\frac{b}{c-x}.$$

Telle est, en définitive, l'équation qu'il faut résoudre pour trouver le potentiel de la couche E_s sur un point intérieur quelconque ; toutes les autres quantités à déterminer se déduiront ensuite de celle-là.

193. **Cas de deux sphères en contact.** — Poisson examine d'abord le cas où les deux sphères sont en contact. Si, pour simplifier, on prend le rayon de la grande sphère A pour unité, on aura alors

$$a=1,$$
$$c=1+b.$$

L'équation (5) devient

$$(6)\qquad \varphi(x)-\frac{b}{b+(1+b)(1-x)}\varphi\left(\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}\right)=h-\frac{gb}{1+b-x}.$$

Pour résoudre cette équation, Poisson cherche séparément les solutions qui conviennent aux cas où le second membre est égal successivement à zéro, h et $-\dfrac{gb}{1+b-x}$, et en ajoutant ces trois solutions il obtient celle qui satisfait à l'équation complète.

En faisant abstraction du second membre, on satisfait à l'équation (6) en posant

$$\varphi(x)=\frac{P}{1-x},$$

P étant une constante, ou plus généralement une fonction de x qui reste la même quand on y change x en $\frac{1+b-x}{b+(1+b)(1-x)}$.

Poisson n'indique pas la marche qu'il a suivie pour les autres cas, il dit seulement qu'il essaie de satisfaire à l'équation (6), dans laquelle on conserve le premier terme h du second membre, par une intégrale définie de la forme

$$\varphi(x)=\frac{h'}{1-x}\int_0^1 \frac{t^{\frac{m}{1-x}+n}-1}{1-t}dt,$$

h', m et n étant des constantes à déterminer. En substituant cette expression dans l'équation, on trouve

$$\varphi(x)=\frac{bh}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-1}-1}{1-t}dt.$$

De même, en ayant égard au deuxième terme seulement $\frac{-gb}{1+b-x}$ du second membre de l'équation (6), on obtient par une intégrale de même forme la solution

$$\varphi(x)=-\frac{bg}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}dt,$$

de sorte que l'intégrale générale de l'équation (6) est

$$\varphi(x)=\frac{P}{1-x}+\frac{b}{(1+b)(1-x)}\left(h\int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-1}-1}{1-t}dt - g\int_0^1 \frac{t^{\frac{b}{(1+b)(1-x)}-\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}dt\right).$$

Le premier terme $\frac{P}{1-x}$ ne convient pas au problème électri-

que parce qu'il deviendrait infini pour $x=1$, et le potentiel de la couche E_a ne peut pas être infini sur la surface de la sphère. D'autre part, les deux sphères étant en contact, le potentiel est le même sur chacune d'elles et $g=h$. L'expression comprise entre parenthèses peut alors être simplifiée et il vient finalement

$$\varphi(x)=\frac{bh}{(1+b)(1-x)}\int_0^1 \frac{\left(t^{-\frac{1}{1+b}}-1\right)t^{\frac{bx}{(1+b)(1-x)}}}{1-t}dt.$$

194. Pour avoir la quantité d'électricité qui est répandue sur la première sphère, il suffit de faire $x=0$, ce qui donne, en désignant par A la densité moyenne sur cette surface,

$$4\pi\varphi(0)=\frac{E_a}{1}=4\pi A;$$

on a donc

$$A=\varphi(0)=\frac{bh}{1+b}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}dt.$$

On a, de même, pour l'autre sphère

$$B=\frac{h}{b(1+b)}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}dt.$$

Les charges des deux sphères sont donc

$$E_a=4\pi A=4\pi h\frac{b}{1+b}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}dt,$$

$$E_b=4\pi b^2 B=4\pi h\frac{b}{1+b}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}dt.$$

La charge totale E_{ab} de l'ensemble des deux sphères est

$$E_{ab}=E_a+E_b=4\pi h\frac{b}{1+b}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}+t^{-\frac{b}{1+b}}-2}{1-t}dt,$$

de sorte que la capacité électrique C du conducteur ainsi formé est

$$C=\frac{b}{1+b}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}+t^{-\frac{b}{1+b}}-2}{1-t}dt.$$

195. Le rapport des densités moyennes sur la petite et sur la grande sphère est

$$\beta=\frac{B}{A}=\frac{1}{b^2}\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}dt}{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}dt}.$$

Par suite d'une propriété connue de cette forme d'intégrales définies, on a

$$\int_0^1 \frac{t^{-\frac{b}{1+b}}-1}{1-t}dt-\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}dt=\pi\cot g\frac{\pi}{1+b},$$

ce qui donne

$$E_b-E_a=4\pi h\frac{b}{1+b}\pi\cot g\frac{\pi}{1+b}=V\frac{b}{1+b}\pi\cot g\frac{\pi}{1+b},$$

$$\beta=\frac{1}{b^2}+\frac{\pi\cot g\frac{\pi}{1+b}}{b^2\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}dt}.$$

Poisson a calculé les valeurs de la fraction β pour un certain nombre de cas correspondant à des expériences de Coulomb (74), et les résultats de la théorie ont été parfaitement conformes avec ceux de l'observation.

L'expérience et le calcul concourent ainsi à prouver que la den-

sité électrique moyenne est toujours la plus grande sur la plus petite des deux sphères, bien que la charge totale de cette sphère soit toujours la plus faible, et que le rapport β augmente à mesure que le rayon b diminue. En développant l'expression β suivant les puissances de $\frac{b}{1+b}$, on voit qu'elle a pour limite l'intégrale

$$\int_0^1 l.\frac{1}{1-t}\,dt$$

qui est égale à $\frac{\pi^2}{6}$. La limite de β est donc

$$\beta = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}644936.$$

Si le rayon b est très-petit, on peut exprimer le rapport β par une série très-convergente dont les premiers termes sont

$$\beta = \frac{1}{(1+b)^2}\left[\frac{\pi^2}{6} + 1{,}20206\,\frac{b}{1+b} + \frac{\pi^4}{56}\left(\frac{b}{1+b}\right)^2\right];$$

si l'on suppose par exemple que $b = \frac{1}{99}$, on trouve $\beta = 1{,}65\ldots$, quantité qui est encore un peu au-dessous de la limite $\frac{\pi^2}{6}$.

196. **Calcul de la densité en chaque point.** — Les calculs qui précèdent donnent le potentiel des deux couches en un point quelconque du diamètre commun et ne permettent pas encore de déterminer la densité en chaque point. Pour cela considérons une sphère de rayon r (fig. 94), électrisée symétriquement par rapport à l'axe OX : Soit y l'ordonnée d'un point P de la surface, et ds un élément de la circonférence méridienne.

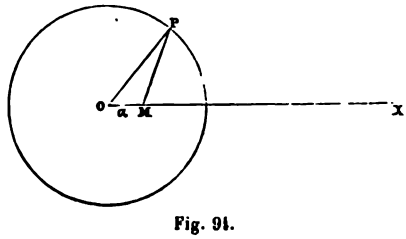


Fig. 94.

La masse électrique de la zone décrite autour de l'axe OX par

l'élément ds est

$$2\pi\mu y ds$$

et le potentiel au point M de la couche totale est

$$V_M = \int \frac{2\pi\mu y ds}{PM}.$$

Soit α la distance OM et θ le cosinus de l'angle POM, on a

$$PM = \sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha\theta}.$$

D'ailleurs, les quantités μ, y et s sont des fonctions de l'angle POM ou de son cosinus θ, de sorte que l'on peut écrire

$$V_M = \int_{-1}^{+1} \frac{f(\theta)\, d\theta}{(r^2 + \alpha^2 - 2\alpha r\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{r} \int_{-1}^{+1} \left[1 - 2\frac{\alpha}{r}\theta + \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} f(\theta)\, d\theta.$$

Le développement de la parenthèse en fonction des puissances de $\left(\frac{\alpha}{r}\right)$ est une série dont les coefficients jouissent de propriétés remarquables. On a en général, pour deux variables x et z,

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + X_3 z^3 + \ldots$$

Les coefficients X_1, X_2 ... sont des fonctions connues de x qui satisfont aux conditions suivantes. L'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'}\, dx$$

est toujours égale à zéro lorsque les indices n et n' sont différents. Lorsque ces indices sont égaux au contraire, on a

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

On peut donc écrire, en appliquant cette forme de développe-

ment à l'expression qui est sous le signe $\int$ dans la valeur de V_M,

$$\left[1-2\frac{\alpha}{r}\theta+\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=1+P_1\frac{\alpha}{r}+P_2\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2+\dots$$

et les coefficients P_1, P_2 ... ne sont pas autre chose que les fonctions X_1, X_2... dans lesquelles on remplacera x par θ.

D'autre part, une fonction quelconque $f(x)$ peut être développée à l'aide des fonctions X, sous la forme

$$f(x)=A_0+A_1X_1+A_2X_2+\dots$$

les coefficients A_0, A_1 ... étant des constantes. On peut donc écrire

$$f(\theta)=A_0+A_1P_1+A_2P_2+\dots$$

et le potentiel au point M devient

$$V_M=\frac{1}{r}\int_{-1}^{+1}\left[1+P_1\frac{\alpha}{2}+P_2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\dots\right](A_0+A_1P_1+A_2P_2+\dots)\,d\theta.$$

A cause des propriétés des fonctions X_n ou P_n rappelées précédemment, il reste simplement

$$V_M=\frac{1}{r}\left[2+\frac{2}{3}A_1\frac{\alpha}{r}+\frac{2}{5}A_2\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2+\dots+\frac{2}{2n+1}A_n\left(\frac{\alpha}{r}\right)^n+\dots\right],$$

c'est-à-dire,

$$4\pi\varphi(\alpha)=\frac{1}{r}\left[2+\frac{2}{3}A_1\frac{\alpha}{r}+\dots+\frac{2}{2n+1}A_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n+\dots\right].$$

Puisque la fonction $\varphi(\alpha)$ est connue, on pourra calculer les coefficients A_1, A_2 ..., ce qui déterminera la fonction $f(\theta)$.

On a posé d'ailleurs

$$2\pi\mu y\,ds=f(\theta)\,d\theta\,;$$

on peut exprimer y et ds en fonction de θ, et cette équation donnera la valeur de μ.

197. Tel est le principe de la méthode employée par Poisson pour calculer la densité en un point quelconque. Si le point dont il s'agit est situé sur l'axe de symétrie, ce calcul est inutile; on connaît en effet le potentiel sur le diamètre commun. Il suffit de

prendre la dérivée du potentiel à la surface par rapport à la normale extérieure et d'appliquer la relation générale

$$-\frac{dV}{dn}=4\pi\mu.$$

On vérifie ainsi par les formules que la densité électrique est nulle au point de contact des deux sphères, propriété constatée par Coulomb et qui d'ailleurs est vraie pour le contact des deux surfaces quelconques (57).

On peut de même calculer les densités aux deux points diamétralement opposés au point de contact. Pour le point C de la grande sphère, le potentiel a pour valeur l'expression

$$4\pi[\varphi_1(x)+F_1(c-x)];$$

on prendra la dérivée de cette fonction par rapport à x et, faisant ensuite $x=-1$, on aura, en appelant Y la densité en ce point,

$$\frac{d}{dx}[\varphi_1(x)+F_1(c-x)]_{x=-1}=Y.$$

La densité Z au point D diamétralement opposé sur la petite sphère s'obtiendra de la même manière.

Quand les deux sphères sont égales, la densité moyenne sur chacune d'elles est

$$A=B=\frac{h}{2}\int_0 \frac{t^{-\frac{1}{2}}-1}{1-t}\,dt=hl.2=\frac{V}{4\pi}l.2;$$

la charge totale de l'ensemble des deux sphères est

$$E_{ab}=2\times 4\pi A=V2l.2,$$

de sorte que la capacité électrique de deux sphères égales en contact est égale à $2l.2$.

Le rapport de la densité maximum à la densité moyenne est

$$\frac{Y}{A}=1,322.$$

Si les deux sphères ne sont pas égales, le rapport de la densité

maximum sur la petite à la densité moyenne sur la grande est

$$\gamma=\frac{Z}{A}=\frac{\displaystyle\int\frac{(t^{-\frac{b}{1+b}}-1)t^{-\frac{1}{2(1+b)}}}{1-t}\,l.\frac{1}{t}\,dt}{4b^2(1+b)\displaystyle\int\frac{t^{-\frac{1}{1+b}}-1}{1-t}\,dt}$$

Poisson a calculé la valeur de cette fraction pour certaines valeurs simples de b afin de comparer les résultats avec ceux que Coulomb avait trouvés par expérience ; nous avons donné le tableau (76) qui résume cette comparaison.

A mesure que le rayon b diminue, le rapport γ tend vers une limite indépendante de b et qui est

$$\lim.\ (\gamma)=4{,}20721.$$

Nous avons reproduit aussi (77) les résultats du calcul effectué par Poisson pour déterminer les densités en différents points de deux sphères en contact dans quelques cas particuliers qui correspondaient à des expériences de Coulomb.

198. **Recherches de M. Plana. — Capacité électrique de deux sphères en contact.** — M. Plana [1] a repris ces calculs de Poisson en les développant et déterminé les valeurs des principales intégrales que nous n'avons fait qu'indiquer rapidement. Nous extrayons de son travail le tableau suivant relatif au cas de deux sphères en contact. Le rayon a de la grande sphère est supposé égal à l'unité, et on a donné au rayon b de la petite sphère différentes valeurs indiquées dans la première colonne. Les deux colonnes suivantes donnent les charges E_a et E_b des deux sphères lorsque le potentiel commun est égal à l'unité ; la somme C de ces deux charges représente la capacité électrique du conducteur formé par l'ensemble des deux sphères ; on peut par les nombres qui précèdent calculer le rapport β des densités moyennes sur les deux sphères. Enfin, les deux dernières colonnes donnent les densités maxima Y et Z sur la grande et sur la petite sphère, aux deux extrémités du diamètre commun, multipliées par le facteur 4π. On trouvera dans le mémoire de M. Plana les nombres

[1] *Mémoires de l'Académie des sciences de Turin*, série II, t. VII, p. 71.

qui conviennent à toutes les autres valeurs de b représentées par des fractions simples comprises entre celles que nous avons choisies, mais, en employant une méthode d'interpolation quelconque, on pourra calculer facilement les valeurs de ces différentes quantités pour tous les cas qui se présenteront.

Si l'on opère avec un potentiel différent de l'unité, il suffit de multiplier les charges et les densités par la valeur nouvelle du potentiel.

Si le rayon de la plus grande sphère n'est pas égal à l'unité, il suffit de prendre dans le tableau le système des deux sphères semblable au système proposé, de multiplier les charges par le rapport de similitude du second système au premier, et de diviser les densités par ce même rapport, pour avoir les nombres qui conviennent au groupe des deux sphères que l'on envisage.

RAYON DE LA GRANDE SPHÈRE $a = 1$.

RAYON DE LA PETITE SPHÈRE b	CHARGE DE LA GRANDE SPHÈRE E_a	CHARGE DE LA PETITE SPHÈRE E_b	CAPACITÉ ÉLECTRIQUE $C = E_a + E_b$	RAPPORT DES DENSITÉS MOYENNES $\beta = \frac{B}{A}$	DENSITÉS MAXIMA SUR LA GRANDE SPHÈRE $4\pi Y$	DENSITÉS MAXIMA SUR LA PETITE SPHÈRE $4\pi Z$
1	0,69315	0,69315	1,38629	1	0,91588	0,91588
0,9	0,72108	0,59777	1,31885	1,02344	0,92939	1,00074
0,8	0,75116	0,50496	1,25612	1,05037	0,94259	1,04332
0,7	0,78267	0,41459	1,19726	1,08107	0,95477	1,22401
0,6	0,81629	0,32831	1,14460	1,11721	0,96628	1,39407
0,5	0,85161	0,24700	1,09861	1,16017	0,97474	1,56260
0,4	0,88809	0,17228	1,06037	1,21241	0,98547	1,75751
0,3	0,92466	0,10632	1,03098	1,27757	0,99244	2,12645
0,2	0,95903	0,05214	1,01117	1,35906	0,99718	2,56949
0,1	0,98724	0,01458	1,00182	1,47666	0,99955	3,21145
0,05	0,99640	0,00387	1,00027	1,55038	0,99994	3,66106
0	1	0	1	1,64494	1,00000	4,20721

La première valeur de E_a, qui correspond à deux sphères égales, est égale à $l.2$; la dernière valeur de β, relative au cas où l'une des sphères est infiniment petite, est égale exactement à $\frac{\pi^2}{6}$.

199. Cas où l'un des rayons est très-petit par rapport à la dis-

tance des deux sphères. — Comme la solution de l'équation (5) (p. 272) présente de grandes difficultés dans le cas général, Poisson (1) a examiné encore un cas particulier, celui où la distance des deux sphères est très-grande par rapport à l'un des rayons. Si l'on admet par exemple que le rapport $\frac{b}{c-a}$ soit très-petit, on peut développer la fonction φ et négliger les puissances de $\frac{b}{c}$ et de $\frac{b}{c-a}$ supérieures à la seconde.

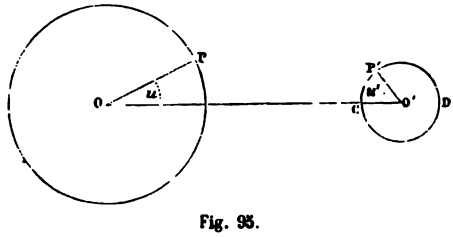


Fig. 95.

En désignant par u et u' les angles de la ligne des centres (*fig.* 95) avec les rayons OP et O'P' qui vont aux points P et P' des deux sphères, par A et B les densités moyennes sur les deux sphères, on trouve que les densités μ et μ' aux deux points P et P' sont exprimées par les formules suivantes

$$\mu = A + \frac{b^2}{ac} B - \frac{b^2(c^2-a^2)B}{a(c^2-2ca\cos u + a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mu' = B - \frac{3a^2\cos u'}{c^2} A + \frac{5a^2 b}{2c^3}(1-3\cos^2 u')\,A\ (2).$$

A ce degré d'approximation, les potentiels V_a et V_b ont pour valeurs

$$V_a = \frac{E_a}{a} + \frac{E_b}{c},$$

$$V_b = \frac{E_b}{b} + \frac{E_a}{c} - \frac{a^3}{c^2(c^2-a^2)} E_b.$$

200. Si l'on suppose que la sphère de rayon b était primitivement à l'état naturel, on aura $B = 0$, et

$$\mu' = -\frac{3a^2}{c^2} A\left[\cos u' + \frac{3\cos^2 u' - 1}{2}\cdot\frac{5b}{3c}\right].$$

(1) *Mémoires de l'Intitut*, 1811, Ire partie, p. 84.

(2) M. Plana trouve que cette expression de Poisson n'est pas exacte et propose de la remplacer par une autre formule notablement moins simple.

Aux deux points C et D de la petite sphère situés sur la ligne des centres, les densités seront alors de signes contraires et dans le rapport de $1+\frac{5b}{3c}$ à $1-\frac{5b}{3c}$. Les points où la densité est nulle s'obtiendront en égalant la quantité comprise entre parenthèses à zéro, ce qui donne, au même degré d'approximation,

$$\cos u' = \frac{5b}{5c}.$$

Comme cette quantité est très-petite, on voit que la ligne neutre est sensiblement l'intersection de la sphère de rayon b par un plan passant par son centre et perpendiculaire à la ligne $00'$ des centres, résultat facile à prévoir.

Si la sphère de rayon b est primitivement chargée, on voit par la valeur de μ', que la distribution sur cette sphère s'obtiendra en ajoutant une couche homogène de densité B à celle qui serait produite sur cette sphère à l'état neutre par l'influence de l'autre.

Enfin, si la sphère de rayon b est maintenue en communication avec le sol, son potentiel est nul et il vient

$$E_b = -E_a \frac{1}{\frac{c}{b} - \frac{a^3}{c(c^2-a^2)}},$$

$$V_a = E_a\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\frac{c^2}{b} - \frac{a^3}{c^2-a^2}}\right] = E_b c\left[\frac{1}{c^2-a^2} - \frac{1}{ba}\right].$$

201. Appliquons encore ces résultats au cas d'une sphère de rayon b infiniment petit, mise d'abord en contact avec une autre sphère de rayon fini a et ensuite transportée à une distance finie de celle-ci. On a alors

$$\frac{B}{A} = \frac{\pi^2}{6};$$

la densité au point de la petite sphère le plus voisin de la grande est

$$A\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{3a^2}{c^2}\right).$$

Cette densité sera nulle si la distance des centres est telle que l'on ait

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{3a^2}{c^2}, \qquad \text{ou} \qquad c = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} a,$$

la distance des sphères est alors

$$c - a = \left(\frac{3\sqrt{2}}{\pi} - 1\right) a.$$

Au point considéré, si la charge totale est positive, l'électricité sera négative pour des valeurs de c plus petites que la précédente, et elle sera positive pour des valeurs plus grandes. A mesure qu'on éloigne la petite sphère de la grande, la densité électrique au point de la petite qui était en contact est d'abord nulle, puis négative; elle reprend ensuite une valeur nulle pour une certaine distance, à partir de laquelle elle est toujours positive. Ce même phénomène se reproduit toujours dans le cas de deux sphères inégales primitivement en contact; nous y reviendrons plus loin.

202. **Cas général.** — Dans un deuxième mémoire (1) Poisson a traité enfin le cas général de deux sphères séparées par un intervalle quelconque. Il a donné deux solutions de l'équation (5), l'une en série et l'autre sous la forme d'une intégrale définie. L'indication de ces résultats nous entraînerait beaucoup trop loin; il est à regretter que les formules de Poisson n'aient pas été réduites en tables, parce qu'elles pourraient donner lieu à des applications intéressantes au point de vue expérimental. Poisson les a appliquées à un exemple particulier, celui des deux sphères dont les rayons sont entre eux comme 1 et 3 et qui sont séparées par une distance égale au plus petit des deux rayons. On a donc alors

$$a = 1$$
$$b = 3$$
$$c = 5.$$

Les densités μ et μ' en des points P et P′ situés sur les sphères

(1) *Mémoires de l'Institut*, 1811, IIe partie, p. 165.

ayon a et b à des distances angulaires u et u' de la ligne des res sont données par des expressions de la forme

$$\mu = Mh - Ng$$
$$\mu' = N'g - M'h$$

s lesquelles M et N sont des fonctions de l'angle u, M′ et N′ des tions de l'angle u'. Les tableaux suivants donnent les valeurs es différents coefficients pour un certain nombre de valeurs angles u et u'.

u	M	N
0	1,6637	1,5595
$\frac{\pi}{8}$	1,5735	1,4215
$\frac{\pi}{4}$	1,4032	1,1343
$3\frac{\pi}{8}$	1,2684	0,8613
$\frac{\pi}{2}$	1,1850	0,6605
$5\frac{\pi}{8}$	1,1374	0,5288
$3\frac{\pi}{4}$	1,1110	0,4486
$7\frac{\pi}{8}$	1,0979	0,4058
π	1,0958	0,3923

u'	M′	N′
0	0,9525	0,8803
$\frac{\pi}{8}$	0,6142	0,4304
$\frac{\pi}{4}$	0,4215	0,1444
$5\frac{\pi}{8}$	0,3677	0,0612
$\frac{\pi}{2}$	0,3526	0,0528
$5\frac{\pi}{8}$	0,3457	0,0212
$3\frac{\pi}{4}$	0,3425	0,0158
$7\frac{\pi}{8}$	0,3411	0,0134
π	0,3407	0,0127

)3. On peut de même déterminer les valeurs de h et g, d'après uantités totales d'électricité dont les deux sphères sont char-

ı désignant par A la densité moyenne sur la petite sphère et B cette densité sur la grande, on aura

$$A = h1{,}2367 - g0{,}7516,$$
$$B = g0{,}3858 - h0{,}0835;$$

ı l'on tire

$$h = A0{,}9311 + B1{,}8139,$$
$$g = B2{,}9846 + A0{,}2015.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de μ et μ', on aura

$$\mu = \alpha A + \beta B$$
$$\mu' = \beta' B + \alpha' A.$$

Le tableau suivant donne les valeurs des coefficients α, β, α' et β' pour les angles choisis précédemment

u ou u'	α	β	β'	α'
0	1,2348	— 1,6369	1,2461	— 0,6277
$\frac{\pi}{8}$	1,1786	— 1,3887	1,0524	— 0,2769
$\frac{\pi}{4}$	1,0779	— 0,8402	0,9961	— 0,0495
$3\frac{\pi}{8}$	1,0074	— 0,2709	0,9924	+ 0,0176
$\frac{\pi}{2}$	0,9703	+ 0,2782	0,9928	+ 0,0405
$5\frac{\pi}{8}$	0,9524	+ 0,4847	0,9933	+ 0,0499
$3\frac{\pi}{4}$	0,9441	+ 0,6765	0,9937	+ 0,0545
$7\frac{\pi}{8}$	0,9405	+ 0,7822	0,9938	+ 0,0563
π	0,9395	+ 0,8131	0,9938	+ 0,0569

Ces tableaux montrent clairement la loi de distribution des fluides sur les deux sphères. On peut donner aux quantités A et B des valeurs quelconques ; si l'une d'elles est égale à zéro, on obtiendra la distribution de l'électricité produite par l'influence d'une sphère électrisée sur une autre sphère primitivement à l'état neutre. De même, si l'une des sphères est maintenue en communication avec le sol, son potentiel est nul, et les tableaux précédents donneront la distribution correspondante. On peut encore faire $h = g$; les sphères auront alors le même potentiel; on peut réaliser ce cas en réunissant les deux sphères par un fil conducteur assez fin pour que la charge de ce fil n'influe pas d'une manière appréciable sur la distribution de l'électricité.

Les formules précédentes permettent de déterminer la capacité électrique de ce conducteur particulier.

204. Si les deux sphères ont été mises primitivement en contact puis reportées à une distance égale au rayon de la plus petite, comme nous l'avons supposé, on a alors

$$\frac{A}{B} = 1{,}2541.$$

En utilisant cette relation dans les formules précédentes, on peut exprimer les potentiels et les densités électriques en fonction de la charge de l'une ou l'autre des deux sphères. On trouve ainsi qu'au point de la petite sphère le plus voisin de la grande la densité est négative et environ les $\frac{7}{100}$ de la densité moyenne. Coulomb a trouvé que si deux sphères électrisées, dont les rayons sont entre eux comme 11 et 4, sont mises en contact puis séparées, la petite donnait des signes d'électricité contraire jusqu'à ce que la distance des deux surfaces fût égale au plus petit rayon. Ce résultat est conforme à celui que donne le calcul.

205. Poisson a examiné d'une manière particulière ce qui a lieu aux points les plus voisins des deux sphères lorsque leur distance est très-faible. S'il n'y a pas entre les quantités totales d'électricité dont elles sont chargées le rapport qui s'établit dans le contact, la densité de la couche électrique aux points les plus voisins sur les deux sphères croît indéfiniment à mesure qu'elles approchent du contact; il en est de même de la pression que le fluide électriqne exerce sur l'air interposé entre ces deux corps, et, quelque faibles que soient les quantités totales d'électricité, il y a toujours une distance assez petite pour que la pression électrique surpasse la distance de l'air, et pour que le fluide s'échappe sous forme d'étincelle ou autrement.

Les couches électriques des deux éléments de surface les plus voisins sont aussi d'espèces différentes et tendent à devenir égales sur les deux sphères. La marche du phénomène est d'ailleurs facile à prévoir.

206. **Densités électriques aux points les plus rapprochés de deux sphères voisines. — Tables de M. Plana.** — M. Plana a calculé des tables qui permettent de déterminer par des formules simples les densités des deux points les plus voisins dans le cas

de distances très-faibles; nous les reproduisons encore parce qu'elles peuvent être utiles pour le cas où l'on voudrait déterminer par expérience la loi des distances explosibles entre deux sphères. En appelant y_1 et z_1 les densités électriques aux points les plus voisins des sphères de rayon a et b, A et B les densités moyennes et Δ la distance minimum des deux surfaces, on a, le symbole *log* indiquant des logarithmes ordinaires,

$$y_1 = A\,\frac{R}{P + \log\frac{\Delta}{b}},$$

$$z_1 = B\,\frac{R'}{P + \log\frac{b}{\Delta}}.$$

Les valeurs des coefficients P, R et R′ sont données par la table suivante pour un certain nombre de valeurs du rapport $\frac{b}{a}$ des deux rayons.

$\frac{b}{a}$	P	R	R′
0,9	1,12294	0,04492	0,04597
0,8	1,13726	0,09561	0,10045
0,7	1,14364	0,14257	0,15592
0,6	1,14059	0,21691	0,24234
0,5	1,12523	0,32040	0,37173
0,4	1,09480	0,32745	0,39698
0,3	1,04755	0,45613	0,58274
0,2	0,98091	0,55983	0,76085
0,1	0,90234	0,65849	0,97257
0,05	0,85138	0,73130	1,13580

Si les rayons a et b sont égaux, on a simplement

$$y_1 = -z_1 = (A - B)\,\frac{M\left(\frac{a}{\Delta} + Q\right)}{N + \log\frac{a}{\Delta}},$$

expression dans laquelle les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$M = 0{,}868589$$
$$N = 1{,}103423$$
$$Q = 0{,}439888.$$

207. Lorsque les deux sphères sont inégales et qu'après avoir été mises en contact on les éloigne peu à peu, les deux points qui étaient primitivement en contact se chargent d'électricités d'espèces différentes, et celui de ces deux points qui appartient à la plus petite sphère possède une électricité contraire à l'électricité totale. A mesure que la distance augmente, la densité électrique en ce point augmente d'abord, atteint un maximum, puis décroît et devient nulle pour reprendre ensuite une valeur de même signe qu'en tous les autres points des conducteurs. M. Plana a encore calculé une table qui donne pour un certain nombre de cas le rapport de la distance Δ des deux surfaces au rayon a de la plus grande des deux sphères, lorsque la densité est nulle sur la plus petite au point le plus voisin de l'autre.

Nous extrayons de cette table les résultats suivants :

$\frac{b}{a}$	$\frac{\Delta}{a}$
1	0
0,9	0,18500
0,8	0,20500
0,7	0,35700
0,6	0,49547
0,5	0,53101
0,4	0,40418
0,3	0,36239
0,2	0,39960
0,1	0,39382
0,05	0,37400
0,0101	0,35703
0	0,35048

208. **Partage électrique entre plusieurs sphères.** — M. Plana a essayé aussi [1] de traiter par le calcul d'une manière approchée

[1] *Loc. cit.*, p. 319.

le cas de plusieurs sphères égales placées en contact sur une même ligne droite.

Pour trois sphères, il a trouvé que le rapport des densités moyennes de la première et de la seconde est 1,4424; l'expérience de Coulomb a donné 1,34.

Pour le cas de six boules, Coulomb a trouvé

$$\frac{A_1}{A_3} = 1{,}56 \qquad \frac{A_2}{A_3} = 1{,}053$$

et les calculs de M. Plana donneraient 1,5063 pour le premier rapport et 1,0615 pour le second.

Dans le cas de 12 boules égales, le calcul donne

$$\frac{A_1}{A_6} = 1{,}6352 \qquad \frac{A_1}{A_2} = 1{,}5079$$

et Coulomb a trouvé

$$\frac{A_1}{A_6} = 1{,}70 \qquad \frac{A_1}{A_2} = 1{,}50.$$

Enfin quand deux boules égales sont mises en contact avec une autre de rayon quadruple, le rapport des densités moyennes des deux boules égales doit être, d'après le calcul, 2,552 et Coulomb a trouvé 2,54.

Si quatre boules égales sont mises en contact avec une autre de rayon quadruple, le rapport des densités moyennes de la première et de la quatrième doit être 3,124 d'après le calcul; l'expérience a donné 3,40.

L'erreur dans ce dernier cas est de $\frac{1}{10}$, mais on voit qu'en général l'accord qui existe entre la théorie et l'expérience est satisfaisant.

209. **Calculs de M. Roche relatifs au cas de deux sphères égales.** — Pour terminer cette revue des calculs effectués par la méthode de Poisson, nous citerons encore les résultats obtenus par M. Roche (1) pour le cas de deux sphères égales.

Considérons les quatre points situés sur le diamètre commun; appelons y' et y_1 les densités aux deux points de la sphère A, z_1 et z' les densités aux deux points de la sphère B, de sorte que

(1) *Mémoires de l'Académie de Montpellier*, section des sciences, t. II, p. 115.

y_1 et z_1 se rapportent aux points situés entre les deux centres. En faisant dans les formules de Poisson (1) $a = b = 1$, on obtient facilement

$$y_1 = \mathrm{M}h - \mathrm{N}g, \qquad y' = \mathrm{M}'h - \mathrm{N}'g,$$
$$z_1 = \mathrm{M}g - \mathrm{N}h, \qquad z' = \mathrm{M}'g - \mathrm{N}'h;$$

les coefficients M, N, M' et N' désignant des fonctions de la distance c des centres dont le développement en séries donne pour premiers termes

$$\mathrm{M} = 1 + \frac{2}{c^2-c-1} + \frac{2c}{(c^2-c-1)^2} + \frac{1}{(c^2-1)^2-c^2-(c^2-2)c} +$$
$$\mathrm{N} = \frac{1}{c-1} + \frac{2}{(c-1)^2} + \frac{1}{(c^2-2)c-c^2+1} + \ldots$$
$$\mathrm{M}' = 1 + \frac{1}{c^2+c-1} - \frac{2c}{(c^2+c-1)^2} + \frac{1}{(c^2-1)^2-c^2+(c^2-2)c} +$$
$$\mathrm{N}' = \frac{1}{c+1} - \frac{2}{(c+1)^2} + \frac{1}{(c^2-2)c+c^2-1} + \ldots$$

Ces séries sont d'autant plus convergentes que c est plus grand que 2.

Les densités moyennes A et B sur les deux sphères sont liées aux quantités h et g par les relations

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}h - \mathrm{Q}g,$$
$$\mathrm{B} = \mathrm{P}g - \mathrm{Q}h,$$

dans lesquelles P et Q désignent deux nouvelles séries

$$\mathrm{P} = 1 + \frac{1}{c^2-1} + \frac{1}{(c^2-1)^2-c^2} - \ldots$$
$$\mathrm{Q} = \frac{1}{c} + \frac{1}{(c^2-2)c} + \ldots$$

210. Si les sphères sont assez éloignées pour qu'on puisse négliger les quantités de l'ordre de $\frac{1}{c^3}$, on obtient

$$y_1 = \mathrm{A} - \frac{3}{c^3}\mathrm{B}, \qquad y' = \mathrm{A} + \frac{3}{c^3}\mathrm{B},$$
$$z_1 = \mathrm{B} - \frac{3}{c^3}\mathrm{A}, \qquad z' = \mathrm{B} + \frac{3}{c^3}\mathrm{A};$$

(1) Second mémoire, p. 190.

ce qui donne quatre équations du premier degré entre six quantités qui peuvent être déterminées par l'expérience. On obtient aisément des relations analogues pour les potentiels, car, à ce degré d'approximation, les séries P et Q se réduisent à

$$P = 1 + \frac{1}{c^2 - 1} = \frac{c^2}{c^2 - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{c^2}} = 1 + \frac{1}{c^2},$$

$$Q = \frac{1}{c};$$

ce qui donne

$$A = h\left(1 + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{g}{c},$$
$$B = g\left(1 + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{h}{c}.$$

Dans le cas particulier où la sphère B communique avec le sol, la quantité g est nulle et il reste simplement

$$A = h\left(1 + \frac{1}{c^2}\right),$$
$$B = -\frac{h}{c}.$$

211. Lorsque les deux sphères sont très-rapprochées, les séries M, M′, N, N′, P et Q ne sont plus assez convergentes pour qu'on en puisse faire usage. Si l'on représente par Δ la distance des surfaces sphériques et si l'on pose

$$\Delta = c - 2 = \frac{\delta^2}{4},$$

la quantité δ^2 sera très-petite. Poisson (1) a développé les expressions des densités électriques en fonction de δ^2, et les coefficients de ce développement sont des intégrales définies.

En posant pour abréger

$$g' = \frac{h - g}{2},$$

(1) Deuxième mémoire, p. 248 — 270.

on a

$$y_1 = \frac{2g'}{\Delta} + \frac{2g'}{3} + R\delta^2,$$
$$z_1 = -\frac{2g'}{\Delta} - \frac{2g'}{3} + R'\delta^2,$$
$$y' = h.\,1{,}075 - g.\,0{,}159 + S\delta^2,$$
$$z' = g.\,1{,}075 - h.\,0{,}159 + S'\delta^2,$$

les coefficients R, R', S et S' étant des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de δ^2. On a de même, en désignant par G, H, G' et H' de nouvelles séries,

$$A = -\frac{g'}{2} l.\,\delta^2 + Gg + Hh,$$
$$B = \frac{g'}{2} l.\,\delta^2 + G'g + H'h.$$

Si l'on suppose la distance des sphères assez petite pour que toutes les séries aient des valeurs négligeables, il restera simplement

$$y' = h.\,1{,}075 - g.\,0{,}159,$$
$$z' = g.\,1{,}075 - h.\,0{,}159,$$
$$y_1 = -z_1 = (h-g)\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{3}\right).$$

A ce degré d'approximation, les densités aux deux points les plus rapprochés sont égales et de signes contraires.

Si la sphère B est en communication avec le sol, on a

$$y' = h.\,1{,}075,$$
$$z' = -h.\,0{,}159,$$
$$y_1 = -z_1 = h\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{3}\right);$$

et la densité moyenne de la sphère A est sensiblement

$$A = -\frac{h}{4} l.\,4\Delta.$$

Comme la densité de cette sphère supposée soustraite à toute action extérieure serait égale à h pour le même potentiel, on voit que la force condensante $\mathfrak{F}$ d'un condensateur formé par l'en-

semble de deux sphères égales entre elles et très-rapprochées, est

$$\mathcal{F} = \frac{A}{h} = -\frac{1}{4} l.\, 4\Delta.$$

Comme M. Roche considérait plutôt les densités que les potentiels, il a calculé une table qui donne les densités aux deux points les plus voisins et les densités moyennes, en supposant que les points extrêmes ont, l'un une densité nulle et l'autre une densité donnée.

En faisant $y' = E$ et $z' = 0$, il a ainsi obtenu

Δ	y_1	z_1	A	B
0,1	8,4 E	— 8,4 E	»	»
0,5	2,0	— 1,9	1,14 E	— 0,33 E
0,6	1,7	— 1,5	»	»
0,7	1,5	— 1,2	»	»
0,8	1,4	— 1,1	»	»
0,9	1,56	— 1,0	»	»
1	1,31	— 0,9	1,06	— 0,22
2	1,08	— 0,5	»	»
3	1,03	— 0,3	»	»
4	1,01	— 0,17	1,005	— 0,06

212. Pour déterminer l'action qui s'exerce entre deux sphères électrisées, il faudrait évaluer la pression exercée contre l'air, en chaque point, par la couche électrique répandue sur l'une des sphères, et faire la somme des composantes de ces pressions, suivant la ligne des centres. M. Roche, à la demande de M. Marié-Davy, a déterminé seulement la différence des pressions aux deux points situés sur la ligne des centres, et l'on peut admettre que cette différence est, au moins d'une manière approximative, proportionnelle à la force électrique résultante. Comme la pression est, en chaque point, proportionnelle au carré de la densité électrique, on voit qu'il suffira d'évaluer, par les formules qui précèdent, la différence

$$y'^2 - y_1^2 = (y' + y_1)(y' - y_1).$$

Si l'on suppose que les sphères aient été primitivement en contact, les potentiels resteront égaux quand on les aura séparées, et, en égalant à l'unité le facteur commun $g=h$, les expressions des densités deviennent

$$y_1=1-\frac{1}{c-1}+\frac{1}{c^2-c-1}-\frac{2}{(c-1)^2}+\ldots,$$
$$y'=1-\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c^2+c-1}+\frac{2}{(c+1)^2}+\ldots;$$

on en déduit

$$y'+y_1=2-\frac{2c(c^2+3)}{(c^2-1)^2}+\frac{2(c^2-1)}{(c^2-1)^2-c^2}+\ldots,$$
$$y'-y_1=\frac{2(3c^2+1)}{(c^2-1)^2}-\frac{2c}{(c^2-1)^2-c^2}+\ldots.$$

Si la distance des centres est assez grande pour qu'on puisse borner le calcul à ces premiers termes, il vient donc

$$y'^2-y_1^2=$$
$$4\left[1-\frac{c(c^2+3)}{(c^2-1)^2}+\frac{c^2-1}{(c^2-1)^2-c^2}\right]\left[\frac{3c^2+1}{(c^2-1)^2}-\frac{c}{(c^2-1)^2-c^2}\right].$$

Cette équation peut être remplacée par la suivante :

$$y'^2-y_1^2=4\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{3}{c^2}-\frac{1}{c^3}\right),$$

si l'on peut borner le calcul aux termes du troisième degré par rapport à $\frac{1}{c}$.

Enfin, le second membre se réduit à $\frac{12}{c^2}$, si la distance des centres devient assez grande pour que toutes les puissances supérieures au carré soient négligeables.

M. Roche a bien voulu nous communiquer le tableau suivant, dans lequel il a calculé, pour un certain nombre de valeurs de la distance des centres, les densités électriques des deux points extrêmes et la différence de leurs carrés, laquelle représente sensiblement la force électrique ; nous y avons ajouté une autre

colonne, donnant le produit de cette différence des carrés par le carré de la distance des centres. Les nombres de la dernière colonne seraient égaux, si la force électrique était exactement proportionnelle à la différence des pressions aux deux points considérés, et en raison inverse du carré de la distance des centres.

c	y_1	y'	$y'^2 - y_1^2$	$(y'^2 - y_1^2)c^2$
2,5	0,112	0,900	0,797	4,98
3	0,386	0,902	0.665	5,98
4	0,582	0,905	0,480	7,68
5	0,707	0,909	0,326	8,15
6	0,773	0,913	0,236	8,50
7	0,807	0,917	0,190	9,31
8	0,837	0,920	0,146	9,34
9	0,858	0,924	0,118	9,56
10	0,870	0,928	0,101	10,10
11	0,884	0,930	0,083	10,04
12	0,892	0,954	0,077	11,08
13	0,902	0,938	0,066	11,15
14	0,911	0,941	0,056	10,98
15	0,919	0,945	0,048	10,80
16	0,926	0,948	0,041	10,50
17	0,93)	0,950	0,038	10,99
18	0,935	0,953	0,034	11,02
19	0,940	0,956	0,030	10,85
20	0,945	0,959	0,027	10,80
21	0,949	0,962	0,025	11,02
22	0,954	0,956	0,023	11,13
40	0,974	0,9776	0,007	11,40

Les nombres de ce tableau ne varient pas d'une manière parfaitement continue, parce que M. Roche n'a pas poussé les calculs assez loin pour que l'on puisse garantir l'exactitude du troisième chiffre décimal dans les valeurs des densités. Mais, en portant ces résultats sur papier quadrillé et traçant des courbes qui les représentent le mieux possible, on peut déduire de ces courbes des valeurs beaucoup plus approchées, surtout si l'on observe que, pour une grande distance des deux sphères, les densités sont toutes deux égales à l'unité, et le produit $(y'^2 - y_1^2)c^4$ égal à 12; on obtient ainsi :

c	y_1	y'	$y'^2 - y_1^2$	$(y'^2 - y_1^2)c^2$
2,5	0,112	0,900	0,797	4,98
3	0,386	0,902	0,665	5,98
4	0,582	0,905	0,478	7,60
5	0,707	0,909	0,326	8,15
6	0,771	0,913	0,240	8,70
7	0,808	0,917	0,188	9,15
8	0,837	0,920	0,146	9,34
9	0,856	0,924	0,120	9,75
10	0,870	0,927	0,100	10,00
15	0,919	0,945	0,048	10,70
20	0,944	0,958	0,027	11,05
25	0,957	0,967	0,019	11,35
30	0,965	0,972	0,013	11,50
35	0,970	0,975	0,010	11,60
40	0,974	0,977	0,007	11,70
∞	1	1	0	12

Quelque imparfaits que soient les nombres de ce tableau, ils montrent clairement la manière dont varie, en fonction de la distance des centres, la force répulsive entre deux boules égales maintenues au même potentiel.

Si le potentiel change, la force varie, pour une distance donnée, proportionnellement au carré du potentiel. Il est donc inexact d'appliquer ces résultats, comme l'a fait M. Marié-Davy (1), au cas de deux sphères isolées, primitivement en contact, puis maintenues à des distances variables (32). Quand les charges électriques des sphères sont constantes, le potentiel de chacune d'elles diminue d'abord très-rapidement, puis d'une manière plus lente à mesure que leur distance augmente, de sorte que la force électrique décroît alors plus rapidement que ne l'indiquent les calculs de M. Roche.

La loi du carré des distances est donc plus voisine de la vérité pour deux sphères dont les charges sont constantes, comme dans les expériences de Coulomb, que si les deux sphères étaient maintenues à un potentiel constant.

(1) *Mémoires de l'Académie de Montpellier*, section des sciences. T. II, p. 150.

DES IMAGES ÉLECTRIQUES

213. La méthode de Murphy ramène, comme nous l'avons vu (181), le calcul numérique de l'état électrique de différents conducteurs soumis à leur influence réciproque à un autre problème plus simple ; mais la solution complète présente souvent des difficultés d'analyse insurmontables. M. Thomson [1] a traité directement par la géométrie un certain nombre de cas particuliers, et est parvenu ainsi à des résultats d'une rare élégance.

214. **Surfaces de niveau de deux points électrisés.** — Considérons, par exemple, deux points A et A′ (fig. 96) situés dans un milieu isolant indéfini, et ayant respectivement des charges électriques e et e'. En désignant par r et r' les distances d'un point quelconque P aux deux points A et A′, le potentiel V des deux masses électriques en ce point est

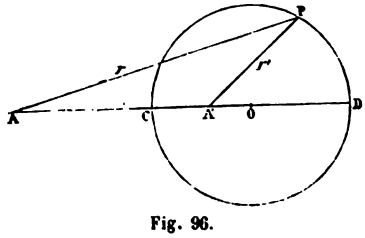


Fig. 96.

$$V = \frac{e}{r} + \frac{e'}{r'}.$$

Les surfaces de niveau sont représentées par cette équation, dans laquelle on donnera à V différentes valeurs. La surface de niveau qui correspond à un potentiel nul a pour équation

$$0 = \frac{e}{r} + \frac{e'}{r'}.$$

Cette surface est tout entière à l'infini, si les deux masses e et e' sont de même signe ; mais, si elles sont de signes contraires, la surface est une sphère, puisque le rapport des distances d'un point quelconque P à deux points fixes A et A′ est constant, et elle renferme celui des deux points qui a la plus faible masse.

215. Supposons, pour fixer les idées, que la charge e' soit né-

[1] *Reprint of papers*, p. 52 et suiv. — J. C. Maxwell, *A Treatise of Electricity and Magnetism*, vol. I, p. 191 et suiv.

gative et plus petite en valeur absolue que la charge e, et posons

$$\frac{AP}{A'P} = \frac{r}{r'} = \frac{e}{-e'} = K. \tag{1}$$

Les deux points A et A′ sont conjugués l'un de l'autre par rapport à la surface de la sphère, c'est-à-dire que l'on a, en désignant par R le rayon de la sphère dont le centre est en O,

$$AO \cdot A'O = R^2.$$

On peut vérifier aisément cette propriété. Soient, en effet, C et D les points où la droite AO rencontre la surface de la sphère, on a, d'après l'équation (1)

$$K = \frac{AC}{A'C} = \frac{AD}{A'D} = \frac{AD - AC}{A'D - A'C} = \frac{R}{A'O} = \frac{AC + R}{A'C + A'O} = \frac{AO}{R}.$$

Il en résulte

$$K = \frac{R}{A'O} = \frac{AO}{R},$$

et

$$AO \cdot A'O = R^2.$$

La position du centre de la sphère et le rayon R sont déterminés par la distance AA′ des deux points, et le rapport K des charges électriques. On a, en effet,

$$K^2 = \frac{R}{A'O} \cdot \frac{AO}{R} = \frac{AO}{A'O}.$$

On en déduit

$$\frac{K^2 - 1}{1} = \frac{AO - A'O}{A'O} = \frac{AA'}{A'O},$$

et, par suite,

$$A'O = AA' \frac{1}{K^2 - 1},$$

$$AO = AA' \frac{K^2}{K^2 - 1}.$$

Ces deux équations donnent aussi

$$R^2 = AO \cdot A'O = AA'^2 \frac{K^2}{(K^2 - 1)^2},$$

ou

$$R = AA' \frac{K}{K^2 - 1}.$$

En désignant par d et d' les distances AO et A'O, on a, en définitive, les relations suivantes, dont nous aurons à faire usage fréquemment,

$$e' = -e\frac{1}{K},$$

$$K = \frac{R}{d'} = \frac{d}{R},$$

$$K^2 = \frac{d}{d'},$$

$$d' = AA' \frac{1}{K^2 - 1},$$

$$d = AA' \frac{K^2}{K^2 - 1},$$

$$AA' = \frac{d^2 - R^2}{d} = \frac{R^2 - d'^2}{d'}.$$

216. **Électrisation d'une sphère non isolée sous l'influence d'un point extérieur.** — Puisque la surface sphérique que l'on considère est au potentiel zéro, on peut la remplacer par une couche mince de métal en communication avec le sol, cette couche ne sera pas électrisée et le potentiel ne sera changé en aucun point, à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère. Supprimons maintenant la masse électrique e', la surface métallique restant en communication avec le sol, le potentiel sera alors nul dans tout l'intérieur de la sphère (165); comme il reste nul à la surface, rien ne sera changé à la distribution des potentiels à l'extérieur. Il s'est produit alors à la surface de la sphère une couche électrique dont la masse totale est égale à e' (164). On connaît ainsi la masse totale de l'électricité développée sur une sphère en communication avec le sol, sous l'influence d'un point électrisé extérieur. Comme la force électrique est nulle dans l'intérieur de la sphère et qu'elle n'a pas changé à l'extérieur, cette couche exerce sur tout point intérieur une action égale et de signe contraire à celle de la masse e située en A.

Ainsi, *la couche considérée agit sur tout point extérieur comme le ferait une masse égale* e' *concentrée en* A' *et sur tout point intérieur comme une masse différente* — Ke' *concentrée au point* A.

M. Thomson appelle le point A' l'*image électrique* du point A par rapport à la sphère. Il y a, en effet, une certaine analogie entre les propriétés de ces points et celles des images virtuelles en optique. L'image virtuelle A' d'un point lumineux A par rapport à un miroir ou une lentille est un point tel que, si une source de lumière y existait, elle émettrait d'un certain côté des rayons identiques à ceux qu'y envoient le miroir ou la lentille par réflexion ou réfraction. De même, la masse e' concentrée en A' produit à l'extérieur de la sphère les mêmes forces que celles qu'y produirait la surface de la sphère communiquant avec le sol et électrisée sous l'influence d'une masse e au point A. Réciproquement, une masse e en A exerce dans l'intérieur de la sphère les mêmes forces que celles qu'y produirait la couche électrique développée sur cette sphère sous l'influence de la masse considérée.

217. **Densité de cette couche en chaque point.** — On peut d'ailleurs déterminer la loi de distribution de la couche électrique sur la surface de la sphère. Considérons, en effet, l'action qui s'exerce sur une masse électrique positive égale à l'unité en un point P (fig. 97), situé en dehors mais tout près de la surface de la sphère. Cette force F peut être considérée comme la résultante de deux autres, l'une répulsive f émanant du point A et égale à $\frac{e}{r^2}$, l'autre attractive f' émanant de A' et égale à $\frac{-e'}{r'^2}$. La résultante F est normale à la surface de la sphère, puisque celle-ci est une surface de niveau ; on le vérifierait sans difficulté. En considérant le parallélogramme des forces et désignant par α et α' les angles PAO et PA'O, on a les relations

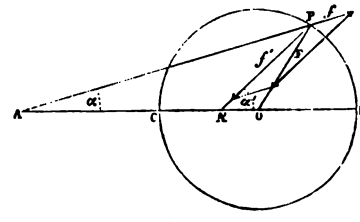


Fig. 97.

$$\frac{f}{\sin\alpha} = \frac{f'}{\sin\alpha'} = \frac{F}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Le triangle APA′ donne

$$\frac{r'}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\alpha'} = \frac{AA'}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Il en résulte

$$\frac{F}{AA'} = \frac{f'}{r} = \frac{f}{r'},$$

ou

$$F = \frac{AA'}{r'} f = \frac{AA'}{r'} \frac{e}{r^2} = AA' \frac{r}{r'} \frac{e}{r^3} = AA'.K \frac{e}{r^3}.$$

Nous pouvons maintenant remplacer la masse e' située en A′ par la couche sphérique qui lui est équivalente. En désignant par μ la densité de cette couche au point P, nous avons vu que la force électrique en un point voisin situé en dehors est égale à $4\pi\mu$, la force étant comptée vers l'extérieur; on a donc

$$-4\pi\mu = AA'.K \frac{e}{r^3},$$

d'où

$$\mu = -\frac{AA'}{4\pi} K \frac{e}{r^3} = \frac{AA'}{4\pi} \cdot \frac{1}{K} \frac{e'}{r'^3}.$$

En remplaçant AA′ et K par leurs valeurs en fonction de la distance d, il vient

$$\mu = -\frac{d^2 - R^2}{4\pi R} \frac{e}{r^3} = \frac{R^2 - d'^2}{4\pi R} \frac{e'}{r'^3}.$$

Ainsi, *la densité électrique en un point* P *d'une surface sphérique conductrice communiquant avec le sol et électrisée sous l'influence d'un point* A, *est en raison inverse du cube de la distance de ce point au point* A *ou au point* A′ *conjugué du premier par rapport à la surface de la sphère.*

Poisson avait démontré ce théorème comme cas particulier du calcul relatif à l'influence réciproque de deux sphères conductrices électrisées. M. Thomson est arrivé au même résultat par des considérations géométriques très-simples, sans même avoir recours à la notion du potentiel et des surfaces de niveau.

218. **Électrisation d'une sphère isolée sous l'influence d'un point**

extérieur. — On peut déduire de là l'influence exercée par un point électrisé sur une sphère conductrice dont on connaît la charge totale ou le potentiel.

Désignons par e_1 la masse électrique du point influent et par d_1 sa distance au centre de la sphère. Si la sphère était en communication avec le sol, il s'y produirait une couche électrique dont la masse totale serait

$$e' = -e_1 \frac{1}{K} = -e_1 \frac{R}{d_1},$$

et dont la densité en un point P situé à une distance r_1 du point influent serait

$$\mu_1 = -\frac{d_1^2 - R^2}{4\pi R} \frac{e_1}{r_1^3}.$$

Cette couche et le point influent produisent dans l'intérieur de la sphère un potentiel nul. Supprimons la communication avec le sol et ajoutons sur la surface une couche homogène de masse m; l'équilibre persistera puisque le potentiel est encore constant dans l'intérieur de la sphère. La charge totale de la sphère est alors

$$M = m - e_1 \frac{R}{d_1}.$$

Si la masse M est donnée, on en déduit

$$m = M + e_1 \frac{R}{d_1},$$

et la densité électrique au point P sera

$$\mu = \frac{m}{4\pi R^2} + \mu_1 = \frac{M}{4\pi R^2} + \frac{e_1}{4\pi R}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{d_1^2 - R^2}{r_1^3}\right).$$

Comme le potentiel V_1 dans l'intérieur de la sphère est produit uniquement par la couche ajoutée m, puisqu'il était nul auparavant, on aura

$$V_1 = \frac{m}{R} = \frac{M}{R} + \frac{e_1}{d_1}.$$

Si la sphère était primitivement isolée et à l'état neutre, la

masse M est nulle, et l'on a alors

$$\mu = \frac{e_1}{4\pi R}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{d_1^2 - R^2}{r_1^3}\right),$$

$$V_1 = \frac{e_1}{d_1}.$$

Si, au lieu de se donner la masse totale M d'électricité répandue sur la sphère, on s'était donné le potentiel V_1, on aurait eu

$$M = V_1 R - e_1 \frac{R}{d_1},$$

$$\mu = \frac{V_1}{4\pi R} + \mu_1 = \frac{1}{4\pi R}\left(V_1 - \frac{d_1^2 - R^2}{r_1^3} e_1\right).$$

219. **Électrisation d'une sphère sous l'influence de plusieurs points extérieurs.** — Supposons enfin qu'une sphère conductrice soit soumise à l'influence d'un certain nombre de points possédant des charges électriques e_1, e_2, e_3 ... situés à des distances du centre égales à d_1, d_2, d_3 ... Chacun des points agissant sur la sphère non isolée y produirait une certaine couche et donnerait un état d'équilibre. La superposition de tous ces états d'équilibre formera un état d'équilibre, et l'équilibre n'est pas encore altéré quand on ajoute à la sphère une couche homogène de masse m.

La masse totale est alors

$$M = m - e_1 \frac{R}{d_1} - e_2 \frac{R}{d_2} - e_3 \frac{R}{d_3} - \dots$$

Si cette masse M est donnée, on en déduit

$$m = M + e_1 \frac{R}{d_1} + e_2 \frac{R}{d_2} + e_3 \frac{R}{d_3},$$

et la densité en un point P est

$$\mu = \frac{m}{4\pi R^2} + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \quad .$$

Le potentiel de la sphère provenant uniquement de la masse m, on a

$$V = \frac{m}{R} = \frac{M}{R} + \frac{e_1}{d_1} + \frac{e_2}{d_2} + \frac{e_3}{d_3} + \dots ;$$

et, si ce potentiel est donné, on en déduit la masse totale M et la densité μ en chaque point.

Le problème de la distribution de l'électricité sur une sphère conductrice sous l'influence d'un certain nombre de masses électriques fixes est donc entièrement résolu.

220. **Action d'un point sur une sphère.** — Dans le cas d'un seul point électrisé extérieur situé en A, l'action de la couche $-e_1\frac{R}{d_1}$ sur ce point A est la même que si la couche était concentrée au point A'. Cette force est attractive et égale à

$$\frac{e_1^2\frac{R}{d_1}}{\overline{AA'}^2}=\frac{e_1^2Rd_1}{(d_1^2-R^2)^2}.$$

L'action de la couche ajoutée m supposée positive est la même que si cette couche était concentrée au centre de la sphère ; elle est répulsive et égale à

$$\frac{e_1m}{d_1^2}=\frac{e_1M}{d_1^2}+\frac{e_1^2R}{d_1^3}=\frac{e_1V_1R}{d_1^2}.$$

La résultante f de ces deux forces, considérée comme attractive, est donc

$$f=\frac{e_1^2R}{d_1^3}\left[\left(\frac{d_1^2}{d_1^2-R^2}\right)^2-1\right]-\frac{e_1M}{d_1^2}$$
$$=\frac{e_1R}{d_1}\left[e_1\frac{d_1^2}{(d_1^2-R^2)^2}-\frac{V}{d_1}\right].$$

L'action du point électrisé sur la sphère est une force égale et contraire à la précédente.

On voit, d'après cela, que l'action d'un point électrisé sur une sphère conductrice est attractive :

1° Quand la sphère n'est pas isolée, le potentiel V étant alors nul ;

2° Quand la sphère est isolée avec une charge totale M nulle ;

3° Quand le point attirant est assez voisin de la sphère, le terme qui contient d^2-R^2 en dénominateur étant alors le plus important.

Pour que l'action soit répulsive, il faut, ou bien que le poten-

tiel soit positif et plus grand que $\frac{e_1}{d_1}\left(\frac{d_1^2}{d_1^2 - R^2}\right)^2$, ou bien que la charge M de la sphère soit de même signe que la charge e_1 du point extérieur, et plus grande que

$$R\frac{e_1}{d_1}\left[\left(\frac{d_1^2}{d_1^2 - R^2}\right)^2 - 1\right].$$

Lorsque la force est nulle, l'équilibre est instable.

Enfin, si la sphère est soumise à l'influence d'un certain nombre de points fixes électrisés, on pourra déterminer l'action de chacun des points sur la sphère, et par suite la résultante de toutes ces actions.

221. **Équilibre d'un plan conducteur indéfini, sous l'influence d'un point électrisé.** — Si les deux masses électriques e et e', que nous avons considérées plus haut, sont égales et de signes contraires, la surface pour laquelle le potentiel est nul est un plan CD (fig. 98), perpendiculaire à la droite AA′ et coupant cette droite en son milieu C.

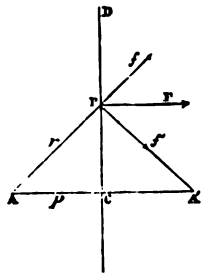


Fig. 98.

Si le plan CD est remplacé par une lame de métal en communication avec le sol, et si l'on supprime la masse e', le plan se chargera d'une couche d'électricité négative égale à e', et restera au potentiel zéro.

Le potentiel sera nul en tous les points de l'espace situés à droite du plan CD, et conservera la même valeur que précédemment pour tous ceux qui sont situés à gauche de ce plan.

La force électrique F en un point P, situé à gauche du plan CD et très-près de sa surface, est la résultante des deux forces f et f', dont chacune est égale à $\frac{e}{AP^2}$. Cette résultante est normale au plan et a pour valeur

$$F = 2\frac{e}{AP^2}\frac{AC}{AP} = 2AC\frac{e}{r^3}.$$

Si l'on remplace le point e' par un plan conducteur, la densité électrique μ sur le plan, au voisinage du point P, est donnée par

l'équation

$$-4\pi\mu = 2AC\,\frac{e}{r^3},$$

ou

$$\mu = -\frac{AC}{2\pi}\,\frac{e}{r^3} = -\frac{p}{2\pi}\,\frac{e}{r^3}.$$

Cette densité est donc proportionnelle à la distance p du point A *au plan, et en raison inverse du cube de la distance du point* P *considéré au point* A.

La densité en C est

$$\mu_c = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{e}{p^2}.$$

222. Comme la surface du plan est infinie, ce qui peut laisser quelques doutes sur la valeur des raisonnements, il n'est pas inutile de démontrer directement que, avec cette loi pour la densité, la charge totale du plan est égale à $-e$, et que le potentiel est nul en tous les points de l'espace situés à droite du plan CD.

Désignons par y la distance CP. La quantité d'électricité répandue sur la couronne comprise entre les deux cercles de rayons y et $y + dy$ est

$$\mu 2\pi y dy = -\frac{p}{2\pi}\,\frac{e}{r^3}\,2\pi y dy = -pe\,\frac{y dy}{r^3}.$$

De l'équation

$$y^2 = r^2 + p^2$$

on déduit

$$y dy = r dr.$$

La charge totale du plan est donc

$$-ep\int_0^\infty \frac{y dy}{r^3} = -ep\int_p^\infty \frac{dr}{r^2} = +ep\left(\frac{1}{r}\right)_p^\infty = -e.$$

Le potentiel en un point M (fig. 99) est, en désignant par $d\sigma$ un élément de surface en un point quelconque P du plan,

$$V_M = \frac{e}{MA} + \int \frac{\mu d\sigma}{MP}.$$

Le potentiel au point M', symétrique du premier, est

$$V_{M'} = \frac{e}{M'A} + \int \frac{\mu d\sigma}{M'P}.$$

Mais, d'autre part, le potentiel en M' est le même que si le plan était supprimé et remplacé par une masse électrique égale à $-e$, située en A'; on a donc aussi

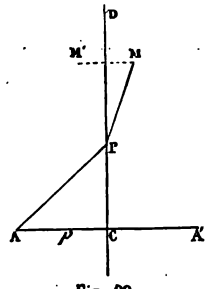


Fig. 99.

$$V_{M'} = \frac{e}{M'A} - \frac{e}{M'A'}.$$

Il en résulte, en remarquant que les distances MP et M'P sont toujours égales,

$$\int \frac{\mu d\sigma}{M'P} = \int \frac{\mu d\sigma}{MP} = -\frac{e}{M'A'},$$

et, par suite,

$$V_M = \frac{e}{MA} - \frac{e}{M'A'} = 0.$$

223. **Transformation des problèmes d'électricité.** — La méthode des images électriques permet de déduire, d'un problème d'équilibre résolu, un certain nombre de solutions relatives à des cas différents, que l'on peut relier au premier par quelques transformations géométriques très-simples.

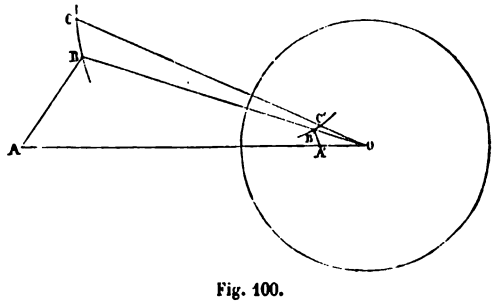


Fig. 100.

Soient, par exemple, deux points A et B (fig. 100), A' et B' leurs images par rapport à un cercle de rayon R, dont le centre est en O, on a

$$(1) \qquad AO \times A'O = BO \times B'O = R^2.$$

Si une quantité d'électricité e est placée en B, son potentiel au

point A sera

$$V = \frac{e}{AB}.$$

Cette masse e a pour image, dans la sphère, une masse e', située en B', et le potentiel de cette masse au point A' est

$$V' = \frac{e'}{A'B'}.$$

La similitude des deux triangles OAB, OB'A' donne la relation

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{B'O},$$

et, en remplaçant OB' par sa valeur tirée de l'équation (1),

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO \cdot BO}{R^2}.$$

On a d'ailleurs, d'après la théorie des images électriques (215),

$$\frac{-e'}{e} = \frac{B'O}{R} = \frac{R}{BO}.$$

Il en résulte

$$\frac{V'}{V} = \frac{e'}{e} \cdot \frac{AB}{A'B'} = -\frac{AO}{R} = -\frac{R}{A'O}.$$

Ainsi le potentiel en A *de la masse* e, *située au point* B, *est au potentiel en* A' *de l'image* e', *située au point* B', *dans un rapport constant, indépendant de la position du point* B. Ce rapport sera donc le même pour un système électrique quelconque et son image.

224. Si le premier système est un conducteur en équilibre comprenant le point A, l'image de ce système, c'est-à-dire le système conjugué par rapport à la sphère, sera une surface électrisée comprenant le point A', et si V est le potentiel constant du premier système, le potentiel V' au point A' de la figure conjuguée est

$$V' = -V\frac{R}{A'O}.$$

Comme le potentiel est en raison inverse de la distance A'0, cette couche n'est pas en équilibre ; mais, si l'on met au centre d'inversion O une masse électrique égale à VR, le potentiel sera nul au point A' et en un point quelconque compris dans l'intérieur de la surface transformée. La couche électrique obtenue est donc celle que prendrait un conducteur non isolé ayant la forme de la surface transformée et soumis à l'influence d'une masse électrique située au point O.

225. Entre les éléments de ces deux surfaces conjuguées, il existe des relations qui permettent de passer simplement de l'un des systèmes à l'autre.

Soient r et r' les distanees BO et B'O, $d\sigma$ un élément BC de surface du premier système et $d\sigma'$ l'élément conjugué B'C', μ et μ' les densités correspondantes, e et e' les masses électriques sur ces deux éléments de surface. On a

$$\frac{e}{e'} = \frac{\mu d\sigma}{\mu' d\sigma'} = -\frac{r}{R} = -\frac{R}{r'}.$$

La similitude des pyramides OBC, OC'B' donne

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \frac{r^2}{r'^2};$$

il en résulte

$$\frac{\mu}{\mu'} = -\frac{r}{R}\frac{r'^2}{r^2} = -\frac{R^3}{r^3} = -\frac{r'^3}{R^3},$$

$$\mu' = -\mu\frac{r^3}{R^3} = -\mu\frac{R^3}{r'^3}.$$

La couche $\Sigma\mu' d\sigma'$ est celle qui se développerait sur la surface transformée S' conductrice et non isolée, sous l'influence d'une masse égale à VR, située au point O.

226. Les figures conjuguées par inversion, par rapport à une sphère, jouissent de propriétés géométriques remarquables, dont nous rappellerons les suivantes, que l'on peut d'ailleurs vérifier aisément :

1° La figure transformée d'une sphère est une autre sphère, et celle d'un cercle un autre cercle, à moins que le centre d'inversion ne soit placé sur la surface de la sphère ou la cir-

conférence du cercle ; dans ce cas, la surface de la sphère a pour surface conjuguée un plan, et la circonférence une droite;

2° L'angle de deux surfaces ou de deux lignes, au point où elles se coupent, n'est pas changé par l'inversion;

3° Toute circonférence de cercle qui passe par un point A, et le point conjugué A′ par rapport à une sphère, coupe cette sphère à angle droit; et inversement, quand une circonférence coupe une sphère à angle droit, tous les points de cette circonférence sont deux à deux conjugués par rapport à la sphère.

227. Comme première application, nous pouvons employer cette méthode de transformation de figures, pour déterminer la distribution de l'électricité sur une sphère conductrice non isolée, sous l'influence d'un point électrisé.

Soit S (fig. 101) une sphère de rayon a et S′ une sphère de rayon a', conjuguée de la première par rapport à une sphère B

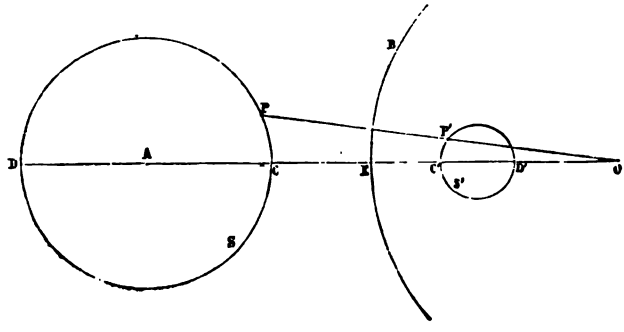


Fig. 101.

de rayon R dont le centre est en O, d et d' les distances du point O aux centres des deux premières sphères. On a

$$\frac{a}{a'}=\frac{d}{d'}=\frac{a+d}{a'+d'}=\frac{d-a}{d'-a'}.$$

Les points C′ et D′ étant conjugués des points C et D, on a aussi

$$(d-a)(d'+a')=(d+a)(d'-a')=R^2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a}{a'}=\frac{d^2-a^2}{R^2}=\frac{R^2}{d'^2-a'^2}.$$

Supposons maintenant qu'une masse e' d'électricité soit distribuée uniformément sur la surface S', la densité μ' de cette couche sera

$$\mu' = \frac{e'}{4\pi a'^2},$$

et le potentiel à l'intérieur sera constant et égal à

$$V' = \frac{e'}{a'}.$$

Le potentiel au point P de la couche transformée est

$$V = -V' \frac{R}{PO} = -\frac{e'}{a'} \cdot \frac{R}{PO}.$$

Plaçons au point O une masse électrique

$$e = e' \frac{R}{a'},$$

le potentiel sera alors nul au point P et sur toute la surface de la sphère S, ainsi que dans son intérieur. La couche trouvée est donc celle qui se développerait sur la sphère S, supposée conductrice et non isolée, sous l'influence d'une masse électrique e située au point O.

La densité au point P est, en désignant par r la distance PO,

$$\mu = -\mu' \frac{R^3}{r^3} = -\frac{e'}{4\pi a'^2} \frac{R^3}{r^3} = -\frac{e}{4\pi a} \frac{d^2 - a^2}{r^3}.$$

La charge totale x de la sphère S peut être déterminée simplement par la condition que le potentiel soit nul au point A', ce qui donne

$$\frac{x}{a} + \frac{e}{d} = 0, \qquad x = -e\frac{a}{d}.$$

Ces résultats sont identiques à ceux qui ont été trouvés précédemment (217).

228. **Systèmes formés par un nombre limité d'images successives.** — Si deux plans conducteurs OA et OB (fig. 102) se coupent sous un angle qui est un sous-multiple de deux droits, un point électrisé P placé entre ces deux plans donnera lieu à un nombre

fini d'images, et si les plans sont en communication avec le sol, on peut déterminer les conditions d'équilibre.

Prenons pour plan de figure un plan passant par le point P et perpendiculaire à l'intersection des deux premiers. Soit $\frac{\pi}{n}$ l'angle AOB (la figure est faite pour le cas où $n=3$), θ l'angle POB et e la charge du point P.

Le point P donnera, par rapport au plan OB, une image Q de charge $-e$; celle-ci, par rapport au plan OA, une image P_1, de

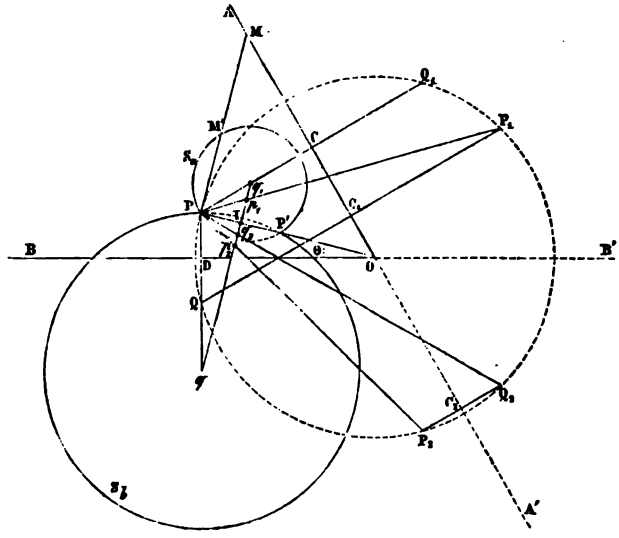


Fig. 102.

charge $+e$, laquelle produira l'image Q_2 de charge $-e$, etc. De même, en commençant par le plan OA, on obtiendra les images successives Q_1, P_2, Q_2.... Ces images sont en nombre limité; elles sont toutes situées sur une même circonférence de cercle ayant pour centre le point O; les angles POQ, QOP_2, de deux images successives de signes contraires, sont égaux alternativement à 2θ et $2\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)$, et les angles POP_1, Q_1OQ_2, de deux images successives de même signes, sont égaux à $2\frac{\pi}{n}$.

Sous l'influence du point P et de toutes ses images, le poten-

tiel est nul sur les deux plans AA′ et BB′. Si l'on remplace les images Q_1, P_1, Q_2..., situées au-dessus du plan AA′, par une couche électrique répandue sur ce plan et égale à la somme de celles qui équivalent aux différentes images, le potentiel sera encore nul sur le plan AA′, nul aussi pour tous les points situés au-dessus du plan, et il conservera, pour les points situés en dessous, la même valeur que précédemment. De même, en plaçant sur le plan BB′ les couches équivalentes aux images Q, P_2, Q_2..., le potentiel sera encore nul sur le plan BB′ et nul en dessous, sans être altéré pour les points situés au-dessus de ce plan. En définitive, l'ensemble des deux couches répandues sur les deux plans et de la masse concentrée au point P produira un potentiel nul dans tout l'espace extérieur à l'angle dièdre AOB. Ces deux couches représentent donc l'électricité développée par l'influence du point P électrisé sur un conducteur indéfini non-isolé terminé par la surface AOB. La marche que l'on a suivie dans ce cas n'est d'ailleurs qu'une application de la méthode de Murphy.

Ces images permettront de déterminer la densité électrique en un point quelconque M de l'un des plans, et il est clair que l'on obtiendra une densité nulle pour tous les points des prolongements OA′ et OB′ des plans proposés, puisque, dans cette région, la force électrique est nulle partout.

La densité au point M est (221)

$$\mu = -\frac{e}{2\pi}\left[\frac{Q_1C}{\overline{MQ_1}^3} - \frac{P_1C_1}{\overline{MP_1}^3} + \frac{Q_2C_2}{\overline{MQ_2}^3} - \dots\right].$$

Le potentiel en M étant nul, le potentiel V des couches électriques seules est, en ce point, égal et de signe contraire à celui de la masse e située en P ; on a donc

$$V = -\frac{e}{MP}.$$

229. Considérons maintenant les surfaces conjuguées des deux plans OA et OB par rapport à une sphère d'inversion de rayon R dont le centre est au point P. Ce sont deux surfaces sphériques S_a et S_b passant au point P, et se coupant suivant une circonférence située dans le plan déterminé par le point P et l'arête d'intersection O des plans proposés.

Ces deux surfaces se coupent suivant l'angle $\frac{\pi}{n}$, et la figure conjuguée de la circonférence sur laquelle sont situées toutes les images est la droite qq_1 qui joint les centres des deux sphères.

Le potentiel en M′ sera

$$V' = -V\frac{MP}{R} = \frac{e}{R}.$$

Ce potentiel est constant, et par conséquent la couche transformée que l'on obtiendra sur la surface de l'ensemble des deux sphères sera en équilibre.

La densité au point M′ peut être calculée à l'aide de celle du point M par la relation (225)

$$\mu' = -\mu\left(\frac{MP}{R}\right)^3 = -\mu\left(\frac{R}{M'P}\right)^3.$$

Comme la surface du ménisque formé par l'intersection des deux sphères correspond aux parties OB′ et OA′ des plans proposés, sur lesquels la densité électrique est nulle, il en résulte que la densité est aussi nulle sur la surface du ménisque; cela devait être, puisque l'ensemble des deux sphères supposées conductrices est en équilibre.

Enfin, la densité est encore nulle sur la circonférence PP′ d'intersection des deux sphères, puisque cette circonférence est la figure conjuguée de l'arête d'intersection O des deux plans. Ceci n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une règle plus générale. Toutes les fois que deux surfaces d'un conducteur en équilibre sous l'influence de masses électriques quelconques se coupent sous un angle rentrant, la densité est nulle au point d'intersection. En effet, la surface conductrice étant une surface de niveau, la force électrique au voisinage de ce point doit être normale à la surface de niveau, et proportionnelle à la densité électrique en ce point. La force, ne pouvant avoir deux directions, doit être nulle et la densité nulle.

230. La densité μ' au point M′ ne se présente pas sous une forme simple quand on la déduit de la densité μ en M; il vaut mieux la calculer autrement.

Les couches électriques des plans AO et BO pouvant être rem-

placées par les images électrisées Q_1, P_1, Q_2..., Q, P_2, Q_2..., pour toute la région comprise dans l'angle AOB, la couche électrique des deux surfaces S_a et S_b exerce la même action à l'extérieur que les points conjugués de ces images. Ces points étant situés sur la ligne des centres, se trouvent aux points de rencontre $q_1, p_1, q_2..., q, p_2, q_2...$ de cette ligne avec les droites qui joignent le point P aux différentes images. Ces points se déterminent facilement, si l'on remarque que les angles q_1Pq_2, p_1Pp_2, ., formés par les droites qui joignent le point P à deux images successives de même signe, sont égaux à $\frac{\pi}{n}$, et que l'angle q_1Pp_1 est égal à θ.

En désignant par les lettres q_1, p_1,... les charges électriques de ces différents points, par a et b les rayons des deux sphères. par α_1, α_2..., β_2..., les distances du point P aux points p_1, p_2.... q_2..., on a (225)

$$q_1 = e\frac{a}{R} \qquad p_1 = -e\frac{\alpha_1}{R}$$

$$q_2 = e\frac{\beta_2}{R} \qquad p_2 = -e\frac{\alpha_2}{R}$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$q = e\frac{b}{R}$$

Les charges de ces différents points sont donc alternativement positives et négatives, et proportionnelles à leurs distances au point P.

On a d'ailleurs

$$PC = PO \sin\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right),$$

$$PD = PO \sin\theta,$$

et, par suite,

$$\frac{PD}{PC} = \frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right)}.$$

D'autre part, à cause de l'inversion, on a

$$PD.2b = PC.2a = R',$$

ce qui donne

$$\frac{PD}{PC}=\frac{a}{b};$$

il en résulte

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{n}-\theta\right)}.$$

Ainsi, la position et les charges des différents points q_1, p_1..., sont complètement déterminées par les rayons a et b des deux sphères et l'angle $\frac{\pi}{n}$ d'intersection.

Enfin la densité électrique en un point M′ situé sur la sphère S_a s'obtiendra en superposant en ce point les différentes couches équivalentes aux points q_1, p_1, q_2..., intérieurs à cette sphère.

On aura ainsi :

pour le point q_1 situé au centre,

$$\frac{e\frac{a}{R}}{4\pi a^2}=\frac{e}{4\pi aR},$$

pour le point p_1 (217),

$$\frac{a^2-\overline{p_1q_1}^2}{4\pi a}\cdot\frac{-e\frac{\alpha_1}{R}}{\overline{M'p_1}^3}=-\frac{e}{4\pi aR}\left(a^2-\overline{p_1q_1}^2\right)\frac{\alpha_1}{\overline{M'p_1}^3},$$

etc.; ce qui donne, pour la densité μ' en M′,

$$\mu'=\frac{1}{4\pi a}\cdot\frac{e}{R}\left[1-\left(a^2-\overline{p_1q_1}^2\right)\frac{\alpha_1}{\overline{M'p'}^3}+\left(a^2-\overline{q_2q_1}^2\right)\frac{\beta_2}{\overline{M'q_2}^3}-\ldots\right].$$

On déterminerait de la même manière la densité en un point de la surface S_b.

231. La charge totale est égale à la somme des charges des différents points intérieurs. Cette charge totale est donc

$$\frac{e}{R}\left[a+\beta_2+\ldots+b-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots)\right].$$

Comme le potentiel est égal à $\frac{e}{R}$, il en résulte que la charge

capable de produire un potentiel égal à l'unité, c'est-à-dire la capacité électrique C de l'ensemble des deux sphères est donnée par l'équation

$$C = a + \frac{a}{\rho_2} + \ldots - b - \left(\frac{b}{z_1} + \frac{b}{z_2} + \ldots\right).$$

En abaissant du point P sur la ligne des centres une perpendiculaire PI, que nous désignerons par h, on a

$$h = a \sin\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right) = \frac{a}{\rho_2} \sin\left(2\frac{\pi}{n} - \theta\right) \ldots = b \sin\theta$$
$$= z_1 \sin\frac{\pi}{n} = z_2 \sin 2\frac{\pi}{n} = \ldots.$$

On en déduit

$$C = h\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right)} + \frac{1}{\sin\left(2\frac{\pi}{n} - \theta\right)} + \ldots + \frac{1}{\sin\theta} - \left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\sin 2\frac{\pi}{n}} + \ldots\right)\right].$$

Dans le cas de la figure en particulier, où $n = 5$, on a

$$C = b \sin\theta\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{5} - \theta\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{5} - \theta\right)} + \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}} - \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{5}}\right],$$

l'angle θ étant donné par l'équation

$$\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{5} - \theta\right)} = \frac{a}{b}.$$

232. **Distribution de l'électricité sur deux sphères qui se coupent à angle droit.** — Si les deux sphères se coupent à angle droit, les images intermédiaires aux deux centres se réduisent

une seule située au pied C (fig. 103) de la perpendiculaire abaissée du point P sur la ligne des centres. La densité en un point I est alors

$$\mu = \frac{1}{4\pi a} \cdot V\left[1 - (a^2 - \overline{AC}^2)\frac{PC}{\overline{MC}^3}\right]$$

$$= \frac{V}{4\pi a}\left[1 - \left(\frac{PC}{MC}\right)^3\right].$$

Dans ce cas, la longueur PC a pour valeur

$$PC = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La capacité électrique est alors

$$a + b - \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

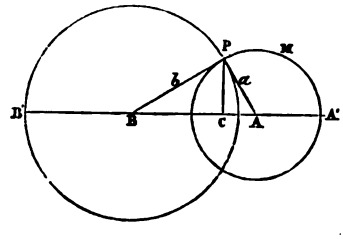


Fig. 103.

Comme les points C et B sont conjugués par rapport à la sphère de rayon a, on a

$$\frac{PC}{PB} = \frac{MC}{MB},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{PC}{MC} = \frac{PB}{MB} = \frac{b}{MB}.$$

En substituant cette valeur dans l'expression de la densité, il vient

$$\mu = \frac{V}{4\pi a}\left[1 - \left(\frac{b}{MB}\right)^3\right].$$

Les densités aux deux extrémités du diamètre commun A'B' ont pour expressions

$$\mu_{A'} = \frac{V}{4\pi a}\left[1 - \left(\frac{b}{A'B}\right)^3\right],$$

$$\mu_{B'} = \frac{V}{4\pi b}\left[1 - \left(\frac{a}{B'A}\right)^3\right].$$

Si la sphère de rayon a est très-petite par rapport à l'autre, on aura sensiblement

$$\mu_B = \frac{V}{4\pi b},$$

et

$$\mu_A = \frac{V}{4\pi a}\left[1 - \left(\frac{b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}}\right)^3\right] = \frac{V}{4\pi a} \cdot \frac{3\frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}}$$

$$= 3\frac{V}{4\pi b} = 3\mu_B.$$

La densité à l'extrémité de la petite sphère est donc triple de la densité à l'extrémité de la grande sphère.

233. Ces résultats peuvent d'ailleurs être obtenus directement. Si l'on met en trois points A, C et B, situés sur une même droite, des charges électriques égales à a, $\frac{-ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et b, le potentiel en un point quelconque M est

$$V = \frac{a}{MA} - \frac{ab}{MC\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{MB},$$

et la surface pour laquelle le potentiel est nul est donnée par l'équation

$$0 = \frac{a}{MA} - \frac{ab}{MC\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{MB}.$$

On reconnaîtra aisément que cette surface est formée par deux sphères ayant leurs centres en A et B, et se coupant sur un plan passant par le point C.

234. On peut aussi déterminer la distribution de l'électricité sur deux sphères conductrices non isolées se coupant à angle droit, sous l'influence d'un point électrisé extérieur Q.

Considérons, en effet, le système conjugué des deux sphères précédentes de rayons a et b, par rapport à une sphère de rayon égal à l'unité, ayant son centre en un point quelconque Q. Ce système conjugué sera encore formé de deux sphères de rayons

a' et b' se coupant à angle droit et dont les centres seront situés sur les droites QA et QB.

Si le potentiel est égal à 1 sur le système primitif AB, le potentiel au point M′ du nouveau système sera égal à $-\frac{1}{QM'}$ (223), de sorte qu'en plaçant au point Q une masse électrique égale à l'unité, le potentiel sera nul sur toute la surface du nouveau système et dans l'intérieur de cette surface. La densité en chaque point se déduira aisément de la densité qui existait au point correspondant du système primitif.

Je ne fais qu'indiquer cette solution, sans la développer, et, pour tous les problèmes analogues, je renvoie le lecteur aux mémoires de M. Thomson et à l'ouvrage de M. Maxwell, où la question est traitée avec plus de détails. Je me suis borné à considérer les cas les plus simples qui peuvent se prêter à des vérifications expérimentales.

235. **Influence d'un point électrisé sur deux surfaces sphériques concentriques.** — Quand un espace est limité par deux surfaces sphériques qui ne se coupent pas, les images successives d'un point placé dans cet espace sont situées en dehors, et forment deux séries illimitées, auxquelles la méthode des images électriques est applicable.

D'autre part, en choisissant convenablement le centre d'inversion, on peut transformer deux sphères qui ne se coupent pas en deux sphères concentriques ; il est donc utile de commencer par ce dernier cas.

Soient S_a et S_b (fig. 104) deux surfaces sphériques concentriques, a et ae^{ϖ} les deux rayons, e désignant la base des logarithmes népériens ; P un point influent, et ae^{u} sa distance au centre commun O.

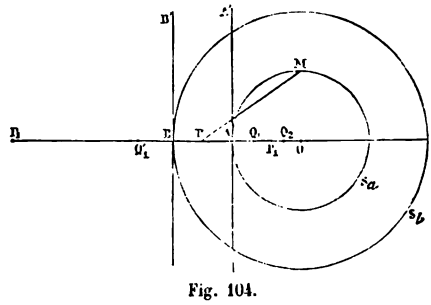


Fig. 104.

Soient Q_1 l'image du point P dans la première sphère S_a, P_1 celle de Q_1 dans la seconde sphère S_b, Q_2 celle de P_1 dans la première, et ainsi de

suite; on aura

$$\begin{aligned} PO &= ae^{\alpha}, \\ PO \cdot Q_1O &= a^2, \\ P_1O \cdot Q_1O &= a^2e^{2\varpi}, \\ &\vdots \quad \vdots \\ P_{n-1}O \cdot Q_nO &= a^2, \\ P_nO \cdot Q_nO &= a^2e^{2n\varpi}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} OP &= ae^{\alpha}, \\ OQ_1 &= ae^{-\alpha}, \\ OP_1 &= ae^{\alpha+2\varpi}, \\ OQ_2 &= ae^{-(\alpha+2\varpi)}, \\ &\vdots \\ OP_n &= ae^{\alpha+2n\varpi}, \\ OQ_{n+1} &= ae^{-(\alpha+2n\varpi)}. \end{aligned}$$

Si l'on représente par les lettres $P, P_1, P_2 \ldots, Q_1, Q_2 \ldots$, les charges électriques situées en ces différents points, on aura (215)

$$Q_1 = -P\frac{a}{OP} = -Pe^{-\alpha},$$

$$P_1 = -Q_1\frac{ae^{\varpi}}{OQ_1} = Pe^{-\alpha}\frac{ae^{\varpi}}{ae^{-\alpha}} = Pe^{\varpi},$$

$$Q_2 = -P_1\frac{a}{OP_1} = -Pe^{\varpi}\frac{a}{ae^{\alpha+2\varpi}} = -Pe^{-(\alpha+\varpi)};$$

et l'on obtiendrait ainsi successivement

$$\begin{aligned} Q_1 &= -Pe^{-\alpha}, & P_1 &= Pe^{\varpi}, \\ Q_2 &= -Pe^{-(\alpha+\varpi)}, & P_2 &= Pe^{2\varpi}, \\ &\vdots & &\vdots \\ Q_{n+1} &= -Pe^{-(\alpha+n\varpi)}, & P_n &= Pe^{n\varpi}. \end{aligned}$$

Désignons maintenant par Q'_1 l'image du point P dans la deuxième sphère, par P'_1 l'image de Q'_1 dans la première, par Q'_2 celle de P'_1 dans la seconde, etc....; on aura de même

$$\begin{aligned} OP'_n &= ae^{\alpha-2n\varpi}, \\ OQ'_n &= ae^{2n\varpi-\alpha}, \\ P'_n &= Pe^{-n\varpi}, \\ Q'_n &= -Pe^{n\varpi-\alpha}. \end{aligned}$$

Toutes les images positives P'_n et les images négatives Q_n sont comprises dans l'intérieur de la première surface S_a; les images P_n et Q'_n sont situées à l'extérieur de la seconde surface S_b.

236. Toutes les images telles que P'_n forment une série géométrique décroissante, dont le premier terme est $Pe^{-\varpi}$, et la raison $e^{-\varpi}$; leur somme est

$$\sum P'_n = Pe^{-\varpi}\frac{1}{1-e^{-\varpi}} = P\frac{1}{e^{\varpi}-1}.$$

De même, les images Q_n forment une série géométrique décroissante dont la somme est

$$\sum Q_n = -Pe^{-\varkappa}\frac{1}{1-e^{-\varpi}} = -Pe^{-\varkappa}\frac{e^{\varpi}}{e^{\varpi}-1}.$$

La charge totale d'électricité comprise dans l'intérieur de la petite sphère S_a est donc

$$M_A = \sum P'_n + \sum Q_n = P\frac{1}{e^{\varpi}-1} - Pe^{-\varkappa}\frac{e^{\varpi}}{e^{\varpi}-1} = -P\frac{e^{\varpi-\varkappa}-1}{e^{\varpi}-1};$$

et, pour tout ce qui concerne les points extérieurs à la surface S_a, on pourra remplacer toutes les images par une couche de masse égale à leur somme, répandue suivant une loi convenable sur la surface S_a.

Les images P_n et Q'_n forment des séries divergentes, et leur somme est aussi divergente; mais, comme l'ensemble du point P et de toutes ses images donne un potentiel nul à l'intérieur de la sphère S_a et à l'extérieur de la sphère S_b, on peut remplacer l'ensemble des images P_n et Q'_n par une couche électrique répandue sur la surface S_b, égale et de signe contraire à la somme des quantités d'électricité que cette surface renferme (168). La charge de la surface S_b sera donc

$$M_B = P\frac{e^{\varpi-\varkappa}-1}{e^{\varpi}-1} - P = P\frac{e^{\varpi-\varkappa}-e^{\varpi}}{e^{\varpi}-1} = -Pe^{\varpi}\frac{1-e^{-\varkappa}}{e^{\varpi}-1}.$$

On peut exprimer ces charges en fonction des rayons des deux

[illegible] distances PA et PB; on a, en effet,

$$\frac{\frac{OB}{OA}-\frac{OA}{OP}}{\frac{OB}{OA}-1}=-P\frac{OB-OP}{OB-OA}\cdot\frac{OA}{OP}=-P\frac{OA}{OP}\cdot\frac{PB}{AB}.$$

$$\frac{\frac{OB}{OA}-\frac{OA}{OP}}{\frac{OB}{OA}-1}=-P\frac{OP-OA}{OB-OA}\cdot\frac{OB}{OP}=-P\frac{OB}{OP}\cdot\frac{PA}{AB}.$$

[illegible] nous supposons que les rayons des deux sphères de[illegible] les surfaces sphériques seront remplacées par [illegible] parallèles AA′ et BB′, passant par les points A et B, et [illegible] à la droite AB. Les charges de ces deux plans [illegible]

$$M_A=-P\frac{PB}{AB},$$

$$M_B=-P\frac{PA}{AB}.$$

[illegible] charges sont donc en raison inverse des distances [illegible] P aux deux plans; leur somme est égale et [illegible] à la charge du point P.

[illegible] **Distribution de l'électricité sur deux sphères exté[illegible] l'une à l'autre.** — Pour passer maintenant au cas de [illegible] extérieures l'une à l'autre, il suffit de transfor[illegible] des deux surfaces sphériques qui précèdent. [illegible] une sphère d'inversion ayant son centre au point [illegible] égal à l'unité. Les surfaces S_a et S_b seront rem[illegible] deux surfaces sphériques S'_a et S'_b, extérieures l'une [illegible] le potentiel des deux couches M_A et M_B, en un point M [illegible] surfaces est égal à $-\frac{P}{MP}$; le potentiel au point M′, [illegible] M, sera (223)

$$+\frac{P}{MP}\times\frac{MP}{1}=+P.$$

[illegible] sera donc constant, et, par suite, les couches ob[illegible] S_a et S'_b seront en équilibre.

239. M. Thomson a traité d'une manière complète le cas de deux sphères conductrices extérieures, en appliquant directement la méthode de Murphy et en utilisant les propriétés des images électriques. Le développement des calculs nous entraînerait trop loin; mais, comme la question est importante, nous rapporterons les tables publiées par M. Thomson.

La répulsion F, qui s'exerce entre deux sphères conductrices dont les potentiels sont égaux à u et v, est une expression de la forme

$$F = 2Buv - Au^2 - A'v^2.$$

Les masses électriques D et E, répandues sur les sphères dont les potentiels sont u et v, sont de la forme

$$D = Iu - Jv,$$
$$E = I'v - Ju.$$

Si les deux sphères ont des rayons égaux, les coefficients A et A' sont égaux entre eux, de même que les coefficients I et I'. En désignant par r le rayon de ces sphères, on a alors

$$F = 2Buv - A(u^2 + v^2),$$
$$D = (Iu - Jv)r,$$
$$E = (Iv - Ju)r.$$

Pour que les sphères n'agissent pas l'une sur l'autre, il faut que les potentiels u et v satisfassent à l'équation

$$u^2 + v^2 - 2\frac{B}{A}uv = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{u}{v} = \rho = \frac{B}{A} - \sqrt{\frac{B^2}{A^2} - 1}.$$

Le tableau suivant donne, d'après M. Thomson [1], la valeur des coefficients I, J, A, B et ρ, pour les cas où la distance des centres est égale à cr, c variant depuis 2, ce qui correspond au contact, jusqu'à 4.

[1] *Reprint of papers*, p. 96 et 97.

c	I	J	A	B	ρ
2,0	J+0,695147	∞	∞	$A+\frac{1}{2}0{,}075858$	$1-\sqrt{\frac{0{,}075858}{A}}$
2,1	1,58596	0,88175	1,13844	1,17439	0,77828
2,2	1,43151	0,72378	0,52852	0,56550	0,69657
2,3	1,34827	0,63595	0,32917	0,36557	0,63555
2,4	1,29516	0,57202	0,23159	0,26464	0,58975
2,5	1,25524	0,52537	0,17452	0,20650	0,55888
2,6	1,22218	0,48819	0,13696	0,16787	0,51699
2,7	1,19755	0,45746	0,11082	0,14090	0,47805
2,8	1,17758	0,43140	0,09174	0,12075	0,46049
2,9	1,16056	0,40886	0,07720	0,10526	0,45667
3,0	1,14629	0,38908	0,06592	0,09299	0,41567
3,1	1,13404	0,37151	0,05695	0,08304	0,39672
3,2	1,12340	0,35571	0,04965	0,07481	0,37947
3,3	1,11410	0,34150	0,04363	0,06791	0,36376
3,4	1,10588	0,32852	0,03863	0,06205	0,34959
3,5	1,09859	0,31665	0,03441	0,05697	0,33615
3,6	1,09208	0,30569	0,03084	0,05257	0,32418
3,7	1,08625	0,29557	0,02775	0,04872	0,31263
3,8	1,08095	0,28617	0,02509	0,04531	0,30211
3,9	1,07617	0,27742	0,02278	0,04229	0,29235
4,0	1,07182	0,26924	0,02075	0,03958	0,28318

Les coefficients deviennent infinis lorsque les deux sphères sont en contact, mais la différence des coefficients, qui entre seule dans l'expression de la force et de la quantité d'électricité, puisque les potentiels u et v sont alors nécessairement égaux, conserve une valeur finie. Nous allons d'ailleurs traiter ce cas directement.

240. Au lieu de connaître les potentiels u et v des deux sphères, on peut se donner leurs charges électriques D et E, et se proposer d'en déduire les valeurs des potentiels et de la force électrique. En résolvant les équations précédentes par rapport à ces quantités, on obtient

$$u = \left(\frac{I}{I^2 - J^2}D + \frac{J}{I^2 - J^2}E\right)\frac{1}{r},$$

$$v = \left(\frac{I}{I^2 - J^2}E + \frac{J}{I^2 - J^2}D\right)\frac{1}{r},$$

$$F = [2fDE - \alpha(D^2 + E^2)]\frac{1}{r^2},$$

en posant

$$\alpha = \frac{A(I^2 + J^2) - 2BIJ}{(I^2 - J^2)^2}$$

$$\beta = \frac{B(I^2 + J^2) - 2AIJ}{(I^2 - J^2)^2}$$

Pour que l'action soit nulle, il faut que le rapport des charges satisfasse à l'équation

$$2\beta DE - \alpha(D^2 + E^2) = 0,$$

qui donne

$$\frac{D}{E} = \frac{\beta}{\alpha} - \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1} = \frac{I_\rho - J}{I - J_\rho} = 0.$$

Le tableau suivant donne les valeurs des coefficients de ces différentes formules.

c	$\frac{I}{I^2 - J^2}$	$\frac{J}{I^2 - J^2}$	α	β	θ
2,0	$\frac{1}{2}\frac{1}{0,693147}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{0,693147}$	∞	$\alpha + \frac{1}{2}\,0,153726$	$1 - \sqrt{\frac{0,153726}{\alpha}}$
2,1	0,91482	0,50926	0,15375	0,22668	0,39102
2,2	0,93869	0,47476	0,08263	0,15251	0,29435
2,3	0,95220	0,44782	0,05444	0,12186	0,23580
2,4	0,96142	0,42528	0,03955	0,10309	0,19944
2,5	0,96829	0,40599	0,02997	0,09038	0,16908
2,6	0,97354	0,38888	0,02342	0,08078	0,14476
2,7	0,97771	0,37348	0,01849	0,07341	0,12786
2,8	0,98105	0,35946	0,01500	0,06710	0,11318
2,9	0,98376	0,34658	0,01222	0,06186	0,09971
3,0	0,98598	0,33467	0,01010	0,05731	0,08877
3,1	0,98782	0,32361	0,00842	0,05333	0,07944
3,2	0,98934	0,31327	0,00708	0,04981	0,07139
3,3	0,99067	0,30366	0,00599	0,04666	0,06442
3,4	0,99178	0,29462	0,00510	0,04382	0,05859
3,5	0,99272	0,28612	0,00457	0,04126	0,05298
3,6	0,99351	0,27810	0,00378	0,03891	0,04868
3,7	0,99423	0,27054	0,00326	0,03679	0,04549
3,8	0,99484	0,26338	0,00283	0,03484	0,04061
3,9	0,99537	0,25659	0,00247	0,03305	0,03736
4,0	0,99583	0,25015	0,00216	0,03139	0,03444

Ces tableaux sont utiles à connaître pour les cas où l'on em-

ploierait des sphères conductrices dans des appareils de mesure.

241. **Distribution de l'électricité sur deux sphères en contact.** — Nous obtiendrons la distribution de l'électricité sur deux sphères en contact en transformant le système de deux plans par rapport à une sphère d'inversion de rayon égal à l'unité ayant son centre en un point P (fig. 105). Si l'on considère un point P chargé d'une quantité d'électricité égale à l'unité, le potentiel en un point M des couches électriques produites par influence sur les plans est égal à $-\frac{1}{MP}$, et le potentiel du système nouveau sera égal à l'unité.

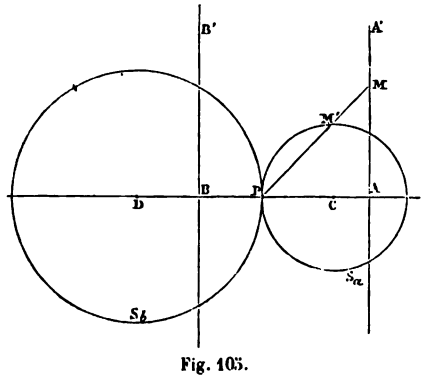


Fig. 105.

Ce système transformé se compose de deux surfaces sphériques S_a et S_b tangentes au point P. Les rayons a et b de ces deux sphères sont donnés par les équations

$$2a.PA = 2b.PB = 1,$$

d'où l'on tire

$$PA = \frac{1}{2a} \quad \text{et} \quad PB = \frac{1}{2b}.$$

Une masse égale à l'unité placée en P produit à droite du plan AA' une série d'images négatives de charges égales à -1 et dont les distances au point P sont successivement

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), \frac{1}{a}+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), \ldots \frac{1}{a}+n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

et une série d'images positives égales à $+1$ situées aux distances

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right), \ldots n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Par inversion, on aura dans l'intérieur de la sphère S_a une série d'images négatives dont les distances au point P seront

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \frac{1}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}, \ldots \frac{1}{n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)},$$

et une série d'images positives aux distances

$$\frac{1}{\frac{1}{a}}, \frac{1}{\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}, \ldots \frac{1}{\frac{1}{a}+n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Les charges des images négatives ont pour expression générale

$$-\frac{1}{n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)},$$

et les charges des images positives

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

La charge totale de la sphère S_a est donc

$$M_a = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\frac{1}{a}+n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} - \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}.$$

Chacun des deux systèmes d'images forme une série divergente, mais la somme est convergente. On a, en effet,

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+(n-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} - \frac{1}{n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} = \frac{a^2 b}{n(a+b)\left[n(a+b)-a\right]},$$

ce qui donne

$$M_a = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a^2 b}{n(a+b)\left[n(a+b)-a\right]}.$$

On trouverait de même pour la charge de la sphère S_b,

$$M_b = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{ab^2}{n(a+b)\,[n(a+b)-b]}.$$

242. Si les deux sphères sont égales, on a alors

$$M_a = M_b = a \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2n(2n-1)}$$
$$= a\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots\right)$$
$$= a\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = al.2.$$

La charge qui donne à l'ensemble des deux sphères égales en contact un potentiel égal à l'unité, c'est-à-dire la capacité électrique de ces deux sphères, est donc

$$C = 2al.2. = 1,3863\,a.$$

Si l'une des sphères S_a est très-petite par rapport à l'autre, on a sensiblement

$$M_a = \frac{a^2}{b} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{a^2}{b}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right] = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

D'autre part, la charge de la grande sphère S_b est sensiblement la même que si la petite n'existait pas, c'est-à-dire $M_b = b$, et la densité moyenne est $\mu_b = \frac{M_b}{4\pi b^2} = \frac{1}{4\pi b}$. La densité moyenne sur la petite sphère est $\mu_a = \frac{M_a}{4\pi a^2}$;

il en résulte

$$\frac{\mu_a}{\mu_b} = \frac{M_a}{M_b} \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1.644936.$$

Ces résultats avaient été déduits par Poisson de son calcul général sur l'influence réciproque de deux sphères conductrices.

COMPARAISON DES PHÉNOMÈNES D'ÉLECTRICITÉ STATIQUE AVEC CEUX DE CONDUCTIBILITÉ CALORIFIQUE.

243. Les équations qui représentent la distribution des potentiels dans un milieu isolant où se trouvent des corps électrisés, sont identiques à celles que l'on rencontre dans la théorie de la propagation de la chaleur par conductibilité. Il en résulte, entre les deux ordres de phénomènes, un certain nombre de relations qui peuvent servir à résoudre facilement des problèmes d'électricité lorsque la solution est indiquée d'une manière plus simple par la nature du phénomène corrélatif dans la propagation de la chaleur, ou inversement.

Toutefois, l'identité des formules n'implique pas l'identité des causes ; elle résulte uniquement de ce fait, qui peut être purement accidentel, que les équations fondamentales sont les mêmes dans les deux cas. Ainsi, il paraît bien démontré que la chaleur n'est pas un fluide, mais il n'est pas permis d'énoncer la même conclusion pour l'électricité, bien que les deux ordres de phénomènes donnent lieu à des lois identiques.

244. **Principes de la Théorie de Fourier.** — La théorie de la propagation de la chaleur par conductibilité, établie par Fourier (1), est basée sur des principes que l'on peut considérer comme résultant directement de l'expérience. La communication de chaleur s'effectuant de proche en proche, on admet que l'état thermique d'un point n'a d'influence sensible que sur les points très-voisins, et que les points les plus chauds tendent à élever la température des points les plus froids. Un élément de volume quelconque envoie pendant l'unité de temps à un autre élément, à une température inférieure, une certaine quantité de chaleur qui dépend de la différence des températures et de la distance des deux éléments. Comme ces distances sont toujours très-petites, les différences de températures sont aussi très-faibles et l'on peut admettre que la quantité de chaleur ainsi communiquée est proportionnelle à la différence des températures.

(1) *Théorie analytique de la chaleur.*

Le coefficient par lequel s'exprime cette proportionnalité dépend de la nature du milieu et, en général, de la direction que l'on envisage dans l'intérieur de ce milieu, si toutes les directions ne sont pas physiquement identiques, comme cela a lieu pour les corps cristallisés ; mais, dans les milieux dits *isotropes*, c'est-à-dire les corps non cristallisés ou ceux qui appartiennent au système cubique, la transmission de chaleur se fait de la même manière en tous sens.

245. Considérons donc un milieu indéfini isotrope conducteur de la chaleur, et supposons qu'il y ait dans ce milieu un certain nombre de sources de chaleur constantes, c'est-à-dire de points ou de corps de dimensions finies entretenus à des températures constantes. Il se produira au sein de ce milieu des échanges de chaleur dans différentes directions ; quand le régime permanent sera établi, chaque élément recevra pendant un certain temps autant de chaleur qu'il en envoie et la température sera en tous les points stationnaire.

Prenons trois axes rectangulaires et considérons un élément de surface AB (fig. 106) perpendiculaire à l'axe des z. La quantité de chaleur qui traverse cette surface est la somme de celles qui se communiquent, de tous les points tels que m situés au-dessous de cette surface et à une petite distance, aux points tels que m' situés au-dessus. La quantité de chaleur qui va du point m au point m' pendant l'unité de temps a pour expression

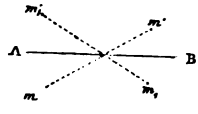


Fig. 106.

$$K\varphi(r)\partial t,$$

K étant une constante, ∂t la différence des températures et $\varphi(r)$ une fonction de la distance r des deux points, fonction qui devient nulle aussitôt que cette distance cesse d'être très-petite; la quantité Q de chaleur qui, pendant l'unité de temps, traverse la surface AB est

$$Q = K\Sigma\varphi(r)\partial t$$

le signe Σ s'étendant à tous les points qui interviennent ici dans le phénomène.

En désignant par x, y, z les coordonnés d'un point de l'élément AB, δx, δy, δz les différences des coordonnées des deux points m et m', on a

$$\delta t = \frac{dt}{dx}\delta x + \frac{dt}{dy}\delta y + \frac{dt}{dz}\delta z;$$

il en résulte

$$Q = K\frac{dt}{dx}\Sigma\delta x + K\frac{dt}{dy}\Sigma\delta y + K\frac{dt}{dz}\Sigma\delta z.$$

Mais la somme $\Sigma\delta x$ est nulle, car les différents termes qui la composent sont deux à deux égaux et de signes contraires. Si la différence des abscisses est $+\delta x$, quand on va du point m au point m', il y a deux autres points m_1 et m_1' pour lesquels la différence est $-\delta x$. De même la somme $\Sigma\delta y = 0$. D'autre part, le facteur $\Sigma\delta z$ est évidemment proportionnel à l'étendue $d\sigma$ de la surface AB, de sorte que l'on peut écrire

$$Q = -Hd\sigma\frac{dt}{dz},$$

H étant une nouvelle constante que l'on appelle *coefficient de conductibilité;* le signe — indique que la chaleur se propage du côté vers lequel les températures diminuent.

246. Considérons maintenant un élément MM' de volume (fig. 107) égal à $dxdydz$, x, y et z étant les coordonnées du point M et t sa température. La quantité de chaleur qui traverse la surface MN est

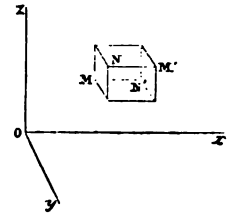


Fig. 107.

$$-Hdzdy\frac{dt}{dx},$$

et celle qui sort par la surface opposée M'N' est

$$-Hdzdy\left(\frac{dt}{dx} + d.\frac{dt}{dx}\right),$$

de sorte que le passage de la chaleur à travers les deux faces perpendiculaires à l'axe des x a laissé dans cet élément de vo-

lume, au bout de l'unité de temps, un excès de chaleur égal à

$$-\mathrm{H}dzdy.\frac{dt}{dx}=-\mathrm{H}dxdydz\frac{d^2t}{dx^2}.$$

Il s'introduirait de même par les faces perpendiculaires à l'axe des y un excès de chaleur

$$-\mathrm{H}dxdydz\frac{d^2t}{dy^2},$$

et, par les deux autres,

$$-\mathrm{H}dxdydz\frac{d^2t}{dz^2}.$$

L'excès total est donc

$$-\mathrm{H}dxdydz\left(\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{d^2t}{dy^2}+\frac{d^2t}{dz^2}\right).$$

Si l'état permanent est atteint, cet excès est nul, la température de l'élément de volume ne devant pas changer ; on a donc

$$\frac{d^2t}{dx^2}+\frac{d^2t}{dy^2}+\frac{d^2t}{dz^2}=0.$$

Nous représenterons encore la somme des trois dérivées secondes de la température par une seule expression Δt, et l'on voit que, quand l'état permanent est atteint dans un milieu isotrope conducteur de la chaleur, on doit avoir en tous les points de ce milieu

$$\Delta t=0.$$

Cette équation fondamentale est la même que celle qui a lieu par le potentiel électrique dans un milieu isolant.

247. **Surfaces isothermes.** — On appelle *surface isotherme* une surface qui passe par tous les points où la température est la même. Le flux de chaleur est en chaque point normal à la surface isotherme qui passe en ce point. En effet, si l'on prend la normale à cette surface isotherme pour axe des z et si l'on considère un élément de volume, on voit que la quantité de chaleur qui se

propage parallèlement à cet axe est

$$-\mathrm{H}dxdy\frac{dt}{dz},$$

et que la quantité de chaleur qui traverse les autres faces est nulle puisque l'on a

$$\frac{dt}{dx}=0 \text{ et } \frac{dt}{dy}=0.$$

La quantité de chaleur qui traverse un élément $d\sigma$ d'une surface isotherme est donc

$$-\mathrm{H}d\sigma\frac{dt}{dn},$$

$\frac{dt}{dn}$ désignant la dérivée de la température par rapport à la normale à la surface isotherme. Le flux de chaleur se propage vers les surfaces isothermes qui ont une température plus basse et, entre deux surfaces isothermes très-voisines, le flux est en raison inverse de leur distance normale. Une surface isotherme est donc l'analogue d'une surface de niveau électrique et le flux de chaleur suit les mêmes lois que la force électrique.

On peut aller plus loin et préciser les conditions dans lesquelles les surfaces isothermes et les surfaces de niveau électrique seront identiques.

248. Considérons d'abord le cas où le milieu conducteur ne renferme qu'une source simple de chaleur, c'est-à-dire une source réduite à un point O. Les surfaces isothermes sont alors des surfaces sphériques concentriques à la source. Menons par ce point O un cône d'ouverture angulaire très-petite ω. La quantité de chaleur qui passe par un élément de surface $d\sigma$, découpé par ce cône sur une sphère de rayon R ayant son centre en O, est

$$-\mathrm{H}d\sigma\frac{dt}{d\mathrm{R}}=-\mathrm{H}\omega\mathrm{R}^2\frac{dt}{d\mathrm{R}}.$$

Cette quantité doit être constante, puisque la propagation a

lieu parallèlement au rayon de la sphère; on a donc

$$-R^2\frac{dt}{dR}=a,$$

$$\frac{dt}{dR}=-\frac{a}{R^2};$$

ou, en intégrant,

$$t=\frac{a}{R}+b,$$

a et b étant des constantes.

A une distance très-grande la température du milieu ne sera pas modifiée par l'influence de la source. Si l'on prend pour zéro des températures la température des points situés à l'infini, on aura $b=0$ et, par suite,

$$t=\frac{a}{R}.$$

Ainsi, quand la source de chaleur est réduite à un point, la température en un point quelconque du milieu est en raison inverse de la distance de ce point à la source, la constante a représentant l'*intensité* de la source considérée. Si la source était sphérique, la température en chacun des points extérieurs serait de même en raison inverse de la distance au centre de la sphère. Enfin, si la source est de forme quelconque ou bien s'il y a plusieurs sources voisines à des températures différentes, les surfaces isothermes à une grande distance de toutes les sources seront sensiblement sphériques, et la température en un point très-éloigné tendra encore à être en raison inverse de la distance de ce point aux sources.

249. **Les surfaces isothermes sont identiques aux surfaces de niveau d'un état électrique corrélatif.** — Considérons maintenant, dans un milieu conducteur indéfini, différents corps A_1, A_2, A_3..., etc., de dimensions finies, dont les surfaces sont entretenues à des températures $t_1, t_2, t_3\ldots$, constantes pour chacun d'eux, mais différentes de l'un à l'autre; il faut démontrer que les surfaces isothermes dans le milieu seront identiques aux surfaces de niveau qui existeraient dans un milieu isolant où les mêmes

corps A_1, A_2, A_3... seraient maintenues à des potentiels électriques égaux respectivement à t_1, t_2, t_3...

Cette proposition peut paraître évidente, puisque les températures d'une part, et les potentiels d'autre part, sont des fonctions qui ont les mêmes valeurs au début, qui satisfont à la même équation différentielle

$$\Delta t = 0 \text{ ou } \Delta V = 0,$$

et qui sont toutes deux nulles à l'infini (1); mais il n'est pas superflu d'en donner une démonstration directe.

Soit V le potentiel électrique en un point P du milieu isolant, et t la température au même point dans le cas du problème de conductibilité. Posons

$$t = V + V';$$

la quantité V' est nulle à la surface de chacun des corps et, comme les fonctions t et V tendent à devenir en raison inverse de la distance pour des points très-éloignés, leur différence V' deviendra aussi en raison inverse de la distance. On a d'ailleurs, pour tous les points situés en dehors des corps A_1, A_2, A_3,.., $\Delta t = 0$ et $\Delta V = 0$, d'où il résulte aussi $\Delta V' = 0$.

Étendons maintenant l'intégrale

$$\int V' \Delta V' dv,$$

dans laquelle dv désigne un élément de volume, à tout l'espace compris entre les corps A_1, A_2, A_3... et une sphère de rayon très-grand. On a, d'après la formule de Green (165),

$$\int V' \Delta V' dv = \int V' \frac{dV'}{ds} d\sigma - \int \left[\left(\frac{dV'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV'}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV'}{dz}\right)^2 \right] dv.$$

Le premier membre de cette équation est nul, puisque le facteur $\Delta V'$ est nul partout. L'intégrale

$$\int V' \frac{dV'}{ds} d\sigma$$

1) Pour simplifier les énoncés, on prend pour zéro des températures la température des points très-éloignés de la source, laquelle n'est pas modifiée par la présence de cette source.

est nulle sur la surface de chacun des corps $A_1, A_2, A_3 \ldots$ puisqu'en ces points la valeur de V' est nulle; cette intégrale tend aussi à devenir nulle sur la surface de la grande sphère, puisque V' est alors en raison inverse du rayon de cette sphère. Il en résulte

$$\int\left[\left(\frac{dV'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV'}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV'}{dz}\right)^2\right]dv=0,$$

et, par suite, on doit avoir, en tous les points de l'espace considéré,

$$\frac{dV'}{dx}=0, \qquad \frac{dV'}{dy}=0, \qquad \frac{dV'}{dz}=0,$$

c'est-à-dire que V' est une constante. Comme cette constante est nulle sur les corps eux-mêmes, elle est nulle partout.

Ainsi, la température en un point d'un milieu conducteur de la chaleur est représentée par le même nombre que le potentiel électrique au même point, le milieu étant isolant.

250. **Démonstration directe de ce théorème par M. Thomson.** — M. Thomson [1] a montré, par des considérations très-simples, l'analogie qui existe entre les deux ordres de phénomènes. Il est clair que, dans un milieu conducteur, la température en un point situé en dehors d'une surface isotherme qui renferme toutes les sources, est indépendante de l'état actuel des sources qui donnent lieu à cette surface. La température d'un point extérieur est donc la même que si les sources étaient distribuées sur la surface isotherme elle-même, de manière à y entretenir une température constante.

Si, dans un milieu conducteur arrivé à l'état permanent sous l'influence d'un système de sources de chaleur, on superpose, aux flux de chaleur qui existent, le mouvement calorifique permanent qui proviendrait d'un autre système de sources, le nouvel état sera encore permanent. En effet, dans chacun des deux états, la quantité de chaleur qui entre dans un élément de volume est égale à celle qui en sort, et il en sera de même pour l'état résultant. Entre deux points m et m', le flux de chaleur est

[1] *Reprint of papers*, p. 1.

égal à la somme des deux flux relatifs aux deux systèmes ; comme ce flux est proportionnel à la différences des températures, la différence des températures finales est aussi égale à la somme des différences relatives aux deux systèmes La température à l'infini, c'est-à-dire l'excès de température produit par les sources en un point très-éloigné, étant égale à zéro dans les deux cas, il en résulte que la température en un point est la somme des températures qui s'y produiraient sous l'influence de chacun des systèmes de sources séparément.

D'autre part, la température produite en un point P par une source simple située au point M est en raison inverse de la distance r de ce point M à la source. Si donc on désigne par $\mu d\sigma$ l'intensité de la source qui existe sur un élément de surface $d\sigma$ de la surface isotherme considérée plus haut, la portion de la température du point P situé à une distance r qui provient de cet élément de surface sera

$$\frac{\mu d\sigma}{r},$$

et la température t produite au point P par la surface isotherme tout entière sera

$$t = \int \frac{\mu d\sigma}{r}.$$

La constante μ est déterminée par cette condition que, pour tous les points de la surface isotherme, cette intégrale prenne une valeur constante t_1.

Cette température t est exactement la même que le potentiel V, au point P, d'une couche électrique répandue sur la surface isotherme, et ayant à chaque point une densité égale à μ. Cette couche serait d'ailleurs en équilibre, puisqu'elle produirait sur toute la surface un potentiel constant. La force électrique qui s'exerce en un point P est normale à la surface de niveau qui passe en ce point, et égale à la dérivée $-\frac{dV}{dn}$ du potentiel par rapport à la normale. D'autre part, le flux de chaleur qui traverse un élément de surface isotherme au même point P est normale à la surface isotherme, proportionnelle à l'étendue de cet

élément et à la dérivée $-\frac{dt}{dn}$; ce flux est donc parallèle et proportionnel à la force électrique au point P.

251. **Conséquences de cette corrélation.** — De cette corrélation entre les deux ordres de phénomènes, on peut déduire un certain nombre de conséquences remarquables :

1° Quand une surface fermée est maintenue à température constante, il est clair que l'état permanent n'est atteint que lorsque la température des différents points situés dans l'intérieur de cette surface est constante et égale à celle qui existe sur la surface elle-même ; il n'y a alors aucun flux de chaleur entre les points situés dans l'intérieur de cette surface. Il en résulte que, si une couche électrique est répandue sur une surface fermée de manière que le potentiel soit constant en tous les points de cette surface, le potentiel sera aussi constant en tous les points compris dans l'intérieur, et il y aura la même valeur que sur la surface ; la force électrique sera nulle en tous ces points. Nous avons été obligés précédemment de recourir à la formule de Green pour démontrer ce théorème (165).

Quand l'enceinte, au lieu d'être fermée par une surface continue, est délimitée par un grillage, le phénomène calorifique fait voir que, si la température n'est pas constante dans l'intérieur de l'enceinte, elle ne peut varier que d'une quantité très-faible. De même, si un corps conducteur électrisé en équilibre a la forme d'une enveloppe discontinue, le potentiel sera sensiblement constant dans l'intérieur de cette enveloppe, et la force électrique insensible. Nous avons cité, à ce sujet (46), les expériences de Faraday.

2° Nous avons vu que la force électrique, dans le voisinage d'un corps électrisé conducteur, est proportionnelle à la densité électrique au point le plus voisin de la surface électrisée, et qu'on a

$$\frac{dV}{dn} = -4\pi\mu.$$

Il en résulte que le flux calorifique dans le voisinage d'une source de chaleur est aussi proportionnel à l'intensité calorifique de cette source au point considéré.

Imaginons deux sources de chaleur A_1 et A_2 (fig. 108) à des températures constantes t_1 et t_2, et construisons un canal infiniment étroit $M_1M_2N_2N_1$ limité latéralement par des courbes orthogonales aux surfaces isothermes, et terminé aux surfaces des deux sources A_1 et A_2. Comme le flux de chaleur est, en chaque point, normal aux surfaces isothermes, ce canal ne recevra ni n'émettra de chaleur par ses surfaces latérales, et l'état permanent exige que toute la chaleur qui entre par la surface M_1N_1 sorte par la surface M_2N_2. Soient $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ les étendues de ces surfaces, μ_1 et μ_2 les intensités calorifiques aux points M_1 et M_2. Le flux de chaleur qui entre par la surface M_1N_1 est, comme nous venons de le voir,

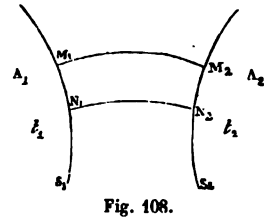


Fig. 108.

$$-\mathrm{H}d\sigma_1\frac{dt_1}{dn}=4\pi\mathrm{H}\mu_1 d\sigma_1.$$

De même, le flux qui entre dans le canal par la surface M_2N_2 est égal à $4\pi\mathrm{H}\mu_2 d\sigma_2$. Comme le flux total doit être nul, il en résulte

$$4\pi\mathrm{H}(\mu_1 d\sigma_1+\mu_2 d\sigma_2)=0,$$

ou bien

$$\mu_1 d\sigma_1+\mu_2 d\sigma_2=0.$$

Dans le phénomène électrique corrélatif, A_1 et A_2 sont deux conducteurs électrisés en équilibre, et les produits $\mu_1 d\sigma_1$ et $\mu_2 d\sigma_2$ sont les quantités d'électricité qui existent sur deux éléments de surface correspondants $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$, déterminés par un canal orthogonal aux surfaces de niveau. On voit que la somme des deux quantités considérées est nulle et, par suite, que les charges électriques de deux éléments de surface correspondants sont égales et de signes contraires (162).

Si le corps électrisé A_2 entoure complétement le corps A_1, toutes les orthogonales menées de la surface S_1 rencontreront la surface intérieure S_2 de A_2, et, par suite, la charge totale du corps A_1 sera égale et de signe contraire à la quantité d'électricité répandue sur la surface S_2. Si l'on revient au phénomène calorifique et que la température t_2 du corps enveloppant soit égale à

zéro, il est clair que la température sera partout égale à zéro à l'extérieur de la surface S_2. De même, dans le phénomène électrique, si le potentiel V_2 est égal à zéro sur la surface S_2, il sera égal à zéro en tous les points situés en dehors de cette surface. Les deux quantités d'électricités égales et de signes contraires répandues sur les surfaces S_1 et S_2 ont donc un potentiel nul et produisent une force électrique nulle, en tous les points extérieurs à la surface enveloppante S_2.

3° Considérons encore, comme dernier exemple, le problème de Riemann (169).

Une source calorifique A à une température t et une autre source B à la température zéro sont situées dans un milieu conducteur de la chaleur. La quantité de chaleur qui va de la source A à la source B est égale à celle que recevrait la source A de la source B, si celle-ci était à la température t, et la première à la température zéro.

Cela résulte immédiatement du principe de la superposition des états permanents. Désignons par Q_b la quantité de chaleur que reçoit la source B dans le premier cas, et par Q_a celle que reçoit la source A, par suite de l'échange des températures. Si l'on superpose les deux états permanents, les deux sources seront à la même température; la quantité de chaleur que la source A enverra à la source B sera $Q_b - Q_a$, et celle que la source B enverra à la source A, $Q_a - Q_b$. Or, ces quantités sont nulles. En effet, en tous les points du milieu la température est inférieure ou au plus égale à t. Si l'on pouvait mener entre les deux corps A et B un canal orthogonal aux surfaces isothermes, les deux bases de ce canal seraient à une même température, supérieure à celles de tous les autres points, et un pareil canal recevrait de la chaleur par ses deux bases sans en perdre par ses surfaces latérales, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'état permanent. On ne peut donc mener aucun canal orthogonal entre les sources A et B, une seule des orthogonales que l'on peut mener à partir de l'une des sources A ou B aboutit à l'autre source, de sorte qu'entre ces deux sources il n'y a aucun flux de chaleur. La somme $Q_a - Q_b$ est donc nulle et, par suite,

$$Q_a = Q_b.$$

Si l'on désigne par μ_b l'intensité calorifique en un point de la source B, et $d\sigma_b$ un élément de surface, on a, dans le premier état calorifique permanent,

$$Q_b = -4\pi H \int \mu_b d\sigma_b ;$$

de même, pour le second état,

$$Q_a = -4\pi H \int \mu_a d\sigma_a .$$

Il en résulte

$$\int \mu_b d\sigma_b = \int \mu_a d\sigma_a .$$

Dans le phénomène électrique corrélatif, A sera un corps conducteur maintenu à un potentiel V, B un autre conducteur non isolé, c'est-à-dire au potentiel zéro, et $\int \mu_b d\sigma_b$ la quantité d'électricité développée sur ce conducteur par l'influence du corps A. De même $\int \mu_a d\sigma_a$ est la quantité d'électricité que prendrait le conducteur A maintenu au potentiel zéro et soumis à l'influence du conducteur B porté au potentiel V. Ces deux quantités d'électricité sont égales, ce qui constitue le théorème de Riemann.

CHAPITRE VIII

INSTRUMENTS D'OBSERVATION ET DE MESURES

252. Nous avons eu l'occasion, plusieurs fois, de recourir à des instruments de mesure dans l'étude des phénomènes généraux de l'électricité; mais il est utile d'examiner avec soin les différentes formes que l'on a données à ces instruments et d'indiquer les cas pour lesquels chacun d'eux présentera des avantages particuliers.

On appelle généralement *électroscope* un appareil qui permet de reconnaître si un corps est électrisé et de déterminer la nature de l'électricité qu'il possède. Un *électromètre*, au contraire, n'est pas seulement un appareil qualificatif; il permet de mesurer la quantité d'électricité que possède un corps, la capacité d'un conducteur ou son potentiel électrique. On peut remarquer que ces différents problèmes se ramènent à la mesure du potentiel d'un conducteur et même, plus généralement, de la différence des potentiels qui existent sur deux conducteurs différents.

Toutefois, on ne peut pas diviser ces instruments en deux classes distinctes, les électroscopes et les électromètres, parce qu'une pareille classification romprait les analogies qui existent entre plusieurs d'entre eux et que, d'ailleurs, un même appareil peut jouer l'un ou l'autre rôle, suivant la manière dont on l'emploie.

M. Thomson [1] les divise autrement en deux groupes : les appareils *idiostatiques* et les appareils *hétérostatiques*. Dans les premiers, on n'emploie qu'une seule espèce d'électricité : deux

[1] *Reprint of papers*, p. 508.

conducteurs, dont l'un au moins est mobile, sont électrisés de la même manière et se repoussent; les autres sont composés de deux ou plusieurs conducteurs électrisés de manières différentes. M. Thomson fait remarquer, à ce sujet, que si deux conducteurs, maintenus à distance constante, sont portés au même potentiel, la répulsion qui s'exerce entre eux est proportionnelle à la quantité d'électricité que possède chacun d'eux, et par suite au carré de l'une d'elles ou au carré du potentiel. Si ces deux conducteurs, au contraire, sont à des potentiels différents, dont l'un est maintenu constant, on peut disposer l'expérience de façon que les variations de la force électrique soient exactement proportionnelles aux changements du potentiel variable et à la valeur absolue du potentiel constant. On a ainsi le moyen de modifier à volonté la sensibilité des instruments et d'écarter les limites entre lesquelles les mesures seront directement comparables.

Cependant, dans la pratique, il arrive aussi qu'un même instrument peut, suivant les circonstances, rentrer dans l'un ou l'autre des deux groupes, de sorte qu'il n'y a pas de distinction absolue à établir entre eux.

Il se présente aussi un autre problème, c'est de déterminer la quantité d'électricité qui s'échappe par un conducteur pendant un temps donné, d'évaluer par exemple le débit d'une machine électrique. On peut encore adapter à ce genre de recherches les appareils dont la construction repose sur le principe de l'équilibre électrique; mais, comme cet écoulement continuel d'électricité est un phénomène identique à ceux qu'on désigne sous le nom de *courants électriques*, on pourra avoir recours aux instruments plus spécialement employés pour l'étude des courants, c'est-à-dire aux galvanomètres.

Une classification basée sur des considérations théoriques est donc à peu près impossible, et, pour éviter toute difficulté, nous grouperons les différents appareils de mesure et d'observation d'une manière arbitraire, en prenant pour lien les analogies de forme qui existent entre eux. Cette revue des instruments ne sera pas encore absolument complète et nous serons obligés de remettre à plus tard la description de quelques uns, soit à cause des principes sur lesquels ils reposent, soit à cause des expériences particulières auxquelles ils sont destinés.

PENDULES ÉLECTRIQUES.

253. **Pendule simple.** — L'un des instruments les plus anciennement employés est le *pendule électrique* formé d'une boule légère A (fig. 109), généralement en moelle de sureau, suspendue par un fil isolant ou conducteur. Si le fil est conducteur et en communication avec le sol, le pendule servira simplement à reconnaître si un corps est électrisé ou non, suivant qu'il se manifestera ou non une attraction. Si le pendule est bien isolé, la boule étant suspendue par un fil de soie à une potence en verre verni à la gomme laque et qu'on en approche un corps électrisé C, il y aura attraction, contact, puis répulsion. En approchant ensuite de ce pendule un bâton de verre et un bâton de résine frottés avec du drap, on verra quel est celui des deux qui produit une répulsion ; celui-là est électrisé de la même manière que le corps proposé.

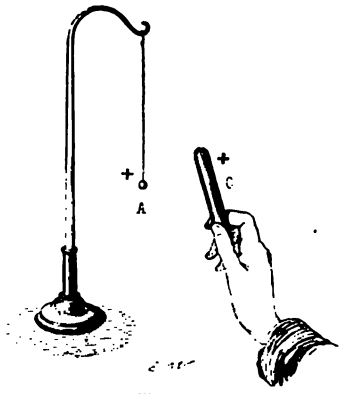


Fig. 109.

On peut aussi charger le pendule d'une électricité connue et en approcher le corps dont l'état est inconnu ; s'il se produit une répulsion, le corps est électrisé de la même manière que le pendule ; si l'on observe, au contraire, une attraction, il faut, avant de conclure que le corps est électrisé de manière différente, s'assurer que cette attraction n'est pas due à un effet d'influence, que les deux corps sont électrisés et qu'à une distance plus grande il n'y aurait pas répulsion.

On forme quelquefois une sorte de pendule avec une tige verticale terminée à la partie supérieure par une boule et pouvant tourner autour de deux pointes ou sur l'arête d'un couteau comme un fléau de balance. Ces appareils de grandes dimensions peuvent être préférés pour rendre les phénomènes visibles à une grande distance, mais ils ont en général trop de masse et

ne possèdent pas la même sensibilité que le pendule ordinaire.

Sous la forme précédente le pendule n'est qu'un électroscope, mais il est facile de le transformer en un appareil de mesure.

254. **Pendule à sinus.** — August, par exemple[1], employait la disposition suivante dont le principe est emprunté à la bousssole des sinus de Pouillet. Dans une cage en verre (fig. 110) rectangulaire, on suspend une petite boule de moelle de sureau *b*, par deux fils de soie attachés à la partie supérieure ; en face de cette boule mobile est une autre boule fixe *a* portée par un pied en gomme laque et pouvant, à l'aide d'une petite coulisse, commandée par une tige extérieure, être rapprochée plus ou moins de la boule mobile. Une ouverture latérale permet d'introduire un corps électrisé et de charger les boules. Enfin, la cage peut tourner sur un pied autour d'un axe horizontal, et l'inclinaison est indiquée par un fil à plomb devant lequel se meut un cadran C gradué, mobile avec la cage.

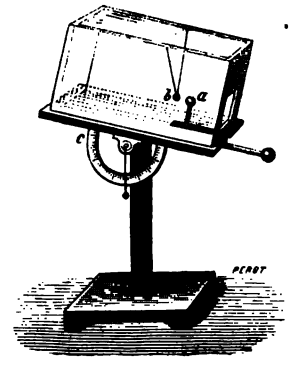


Fig. 110.

On observe la distance des deux boules lorsqu'elles sont à l'état neutre et la cage horizontale, puis on les électrise de la même manière, elles se repoussent et on incline la cage du côté convenable, de façon que les boules soient ramenées à la même distance que primitivement. S'il a fallu, pour cela, tourner la cage de l'angle α, on voit aisément que la composante du poids p de la boule mobile dirigée vers la boule fixe est $p \sin \alpha$ et qu'elle est égale à la force répulsive électrique. Donc, si la charge de l'une des boules est constante, la charge de l'autre est proportionnelle au sinus de la déviation nécessaire pour les ramener à la même distance. Si les deux boules ont été chargées en même temps par un même corps électrisé, le produit des charges des deux boules est proportionnel au sinus de la déviation ou bien la charge de chacune d'elles est proportionnelle à la racine carrée de ce sinus. La sensibilité de l'appareil peut d'ailleurs être

[1] Riess. *Reibungselektricität*. Bd. I, p. 61.

modifiée à volonté par la distance que l'on établit primitivement entre les deux boules.

L'appareil d'August ne paraît pas avoir été très-employé, mais le principe sur lequel il repose a reçu plusieurs applications.

255. **Électromètre de Henley.** — L'électromètre à cadran de Henley (1) est une autre solution du même problème. Cet instrument se compose d'un pendule A (fig. 111), formé par une baguette d'ivoire terminée par une boule de liége ou de moelle de sureau et attachée à une tige verticale T en bois. Cette tige porte un cadran vertical divisé dont le centre correspond à l'axe autour duquel tourne le pendule. Si l'appareil est à l'état neutre, le pendule reste vertical au zéro de la graduation; s'il est électrisé, le pendule s'écarte d'autant plus que la charge est plus grande. Un tel instrument, installé sur le conducteur d'une machine électrique ou sur l'armature intérieure d'une bouteille de Leyde, indique donc rapidement si la charge augmente ou diminue et peut servir pour vérifier si, dans différentes expériences, ces conducteurs sont portés au même potentiel. Pour évaluer avec cet électromètre la quantité d'électricité ou le potentiel d'un conducteur, il faudrait connaître la loi des déviations ou établir par expérience une graduation théorique. Le calcul exact présenterait sans doute de grandes difficultés, et les formules que l'on pourrait établir par un calcul approché n'auraient pas grand intérêt; les expériences suivantes donneront au moins une idée de la marche des déviations.

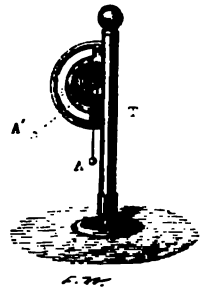


Fig. 111.

256. M. Marié-Davy (2) s'est servi d'un électromètre à cadran dont la tige portait une boule à la hauteur où elle est touchée par la boule mobile; cet électromètre était mis en communication avec l'armature intérieure d'une bouteille de Leyde chargée par une machine électrique. Les deux armatures de la bouteille étaient reliées séparément aux deux boules d'un micromètre à

(1) *Phil. trans. abridged.*, vol. XIII, p. 525 (1772).
(2) *Mémoire de l'Académie de Montpellier*, Section des sciences, t. I, p. 316.

charges et on observait la déviation du pendule au moment se produisait la décharge à une distance déterminée.

DISTANCE EXPLOSIVE D	DÉVIATION DU PENDULE α	DISTANCE DES CENTRES DES BOULES δ	$\frac{\sin\alpha \sin\frac{\delta}{2} \operatorname{tang}\frac{\delta}{2}}{D^2}$
2mm	6°,5	7°,8	17,6
3	8 ,5	10	16,8
4	10 ,5	12	16,7
5	12 ,4	13, 6	16,7
6	14	15, 5	16,4
7	15 ,7	17, 2	16,3
8	16 ,9	18, 4	15,5
9	18 ,1	19, 6	14,7
10	19	20, 5	13,5
11	19 ,8	21, 1	12,3
12	20 ,5	22	11,6
15	21	22, 5	10,8

Comme le potentiel de l'armature de la bouteille est à peu ès proportionnel à la distance explosive, si les charges des ules étaient proportionnelles aux potentiels et si l'on pouvait luire ces boules à leurs centres, les produits donnés dans la rnière colonne seraient constants; on voit que cette condition loin d'être réalisée.

Sans avoir recours à des calculs aussi compliqués, on peut ercher simplement le rapport qui existe entre la distance ex- sive et la déviation du pendule ; on obtient ainsi :

D	$\frac{\alpha}{D}$	$\frac{\delta}{D}$	D CALCULÉ
2	3,15	3,90	2,11
3	2,85	3,33	3,02
4	2,62	3	3,96
5	2,48	2,72	5
6	2,33	2,58	6
7	2,24	2,46	7,19
8	2,11	2,30	8,14
9	2,01	2,18	9,17
10	1,90	2,05	10
11	1,80	1,92	10,79
12	1,71	1,85	11,51
15	1,61	1,73	12,05

Les rapports obtenus dans les premières colonnes ne sont pas constants, mais on peut se servir de ce tableau pour exprimer la valeur du potentiel en fonction de la déviation, soit par une courbe tracée sur papier quadrillé, soit par une formule empirique simple comme la suivante

$$D = Ax - Bx^2,$$

par laquelle ont été calculés les nombres de la dernière colonne, en prenant pour les coefficients A et B les valeurs

$$A = 0.712,$$
$$B = 0.000594,$$

déterminées par les expériences relatives aux distances explosives de 5^{mm} et de 10^{mm}. On voit que l'accord des calculs avec l'observation est satisfaisant pour des déviations plus faibles que 20° et que l'électromètre de Henley, bien employé, avec des boules plus ou moins lourdes, peut rendre de grands services pour des expériences auxquelles les instruments plus précis ne conviendraient pas.

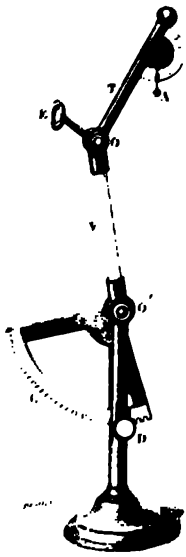


Fig. 112.

257. Il est facile encore de transformer cet appareil en un électromètre à graduation systématique, comme celui d'August. Pour cela, la tige T (fig. 112), qui supporte le pendule A, peut tourner autour d'un axe horizontal O sur une garniture qui est portée par une tige isolante V mobile elle-même, autour d'un axe horizontal O'. Un cadran divisé C, mû par un bouton D à pignon, indique l'angle dont la tige V a tourné.

L'appareil étant disposé de façon que le pendule à l'état neutre soit situé en face d'une certaine division, 10° par exemple, de son cadran, on le met en communication par l'anneau E avec un conducteur électrisé, et le pendule diverge davantage; on fait alors tourner le support V d'un angle α, à l'aide du bouton D, de façon que le pendule se retrouve

en face de la même division. Le moment du poids du pendule par rapport à son axe de rotation est alors proportionnel à $\sin\alpha$; comme la distance relative du pendule et de sa tige est la même dans tous les cas, la force électrique est proportionnelle au carré du potentiel, et quand l'équilibre est atteint, le potentiel est proportionnel à la racine carrée de l'angle dont l'appareil a tourné. On peut d'ailleurs modifier la sensibilité de cet électromètre à volonté, suivant l'écartement que l'on choisira pour la distance constante du pendule à son support.

258. On a voulu quelquefois donner à l'électroscope de Henley plus de sensibilité, ou du moins des indications plus apparentes, en transmettant le mouvement du pendule à une aiguille qui se meut sur un cadran, et qui décrit plusieurs circonférences pendant que le pendule se dévie d'un angle de 90°. Pour cela, l'axe du pendule porte une roue dentée qui engrène avec un pignon d'un diamètre beaucoup plus petit armé d'une aiguille. Sans doute on multiplie de cette manière les déviations, mais la force motrice est si faible que les moindres défauts dans le mécanisme de transmission peuvent troubler la marche de l'appareil et rendre ses indications tout à fait illusoires.

Fig. 113.

259. M. Harris a employé un électromètre à cadran et à double répulsion plus sensible (1). C'est un anneau de cuivre (fig. 113) au-dessus duquel est une aiguille de cuivre fixe AB, dirigée suivant un des diamètres de l'anneau et terminée par deux boules. Une autre aiguille de paille *ab*, munie de petits curseurs *m* qui permettent de l'équilibrer en partie, est mobile

(1) *Phil. trans.* (1834), part. II, p. 214.

[illegible]

[illegible]

Doubles produits — [illegible]

[illegible]

Ce double pendule à fils de lin, munis ou non de boules à leurs extrémités, a été employé depuis d'une manière générale, comme nous l'avons vu par exemple pour la découverte de l'influence par Canton.

261. **Électroscope de Cavallo.** — Cavallo (1) fit construire en 1777, pour l'étude de l'électricité atmosphérique, un électroscope que l'on peut considérer comme le type de tous ceux qui sont employés aujourd'hui. Cet appareil est réduit à de petites dimensions pour être facilement transportable. Il se compose (fig. 114) de deux pendules à fils d'argent très-fin portant de petites balles de moelle de sureau allongées *a* et *b* ; ces pendules

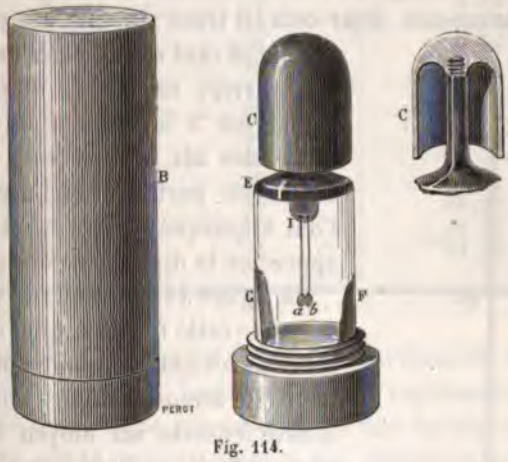


Fig. 114.

sont suspendus à une plaque d'ivoire I fixée à une tige de métal que l'on mastique dans la tubulure d'une cloche en verre. La cloche est mastiquée sur un support en bois ou en métal; la partie supérieure est recouverte d'une couche de cire d'Espagne fondue E, et le conducteur se termine par un chapiteau C en métal qui a pour but de garantir la couche isolante de la pluie. Dans l'intérieur de la cloche, on voit deux feuilles d'étain F et G collées sur le verre, qui communiquent avec la base, contre lesquelles les pendules viennent se décharger lorsque leur divergence est trop grande, et qui ont aussi pour effet d'augmenter

(1) Cavallo, *Traité complet d'électricité*, traduction française, p. 322.

portionnelle à leur poids et au carré de la charge; la charge électrique est donc proportionnelle à la racine carrée du poids des pendules. Toutefois un pareil mode de graduation est difficile à réaliser.

D'autre part, si les boules des pendules sont attachées en des points assez éloignés, de sorte qu'elles ne se touchent pas lorsqu'elles sont à l'état neutre, la distance de leurs centres étant alors égale à d, cette distance deviendra $d + 2l \sin \alpha$ quand la déviation de chacun des pendules de longueur l sera égale à α. Si les charges des boules sont a et b, et p le poids de chaque pendule, la condition d'équilibre est sensiblement

$$\frac{ab}{(d + 2l \sin \alpha)^2} = p \operatorname{tang} \alpha.$$

La charge totale et le potentiel V de l'électroscope sont alors à peu près proportionnels à la charge de chacune des boules, ce qui donne

$$V = H (d + 2l \sin \alpha) \sqrt{\operatorname{tang} \alpha};$$

mais une pareille expression, outre qu'elle n'est pas rigoureuse, n'a même pas l'avantage d'être simple, de sorte qu'il vaut mieux finalement en revenir aux graduations empiriques.

Volta remplaçait les pendules à boules par deux pailles très-légères qui donnaient aux appareils plus de sensibilité, mais le meilleur moyen est encore de se servir de deux feuilles d'or collées des deux côtés d'une tige de métal aplatie : cette disposition est due à Bennet [1]. La plupart des électroscopes employés aujourd'hui sont à feuilles d'or; ils peuvent différer entre eux par leurs dimensions, par la forme du vase dans lequel sont placées les feuilles, mais ces détails sont sans importance, et ce que nous avons dit de l'électroscope à feuilles d'or (99) nous dispense d'y revenir.

264. **Électroscope condensateur de Volta.** — Quand on veut étudier des *sources* d'électricité très-faibles, il arrive souvent que le potentiel produit par ces sources est insuffisant pour donner aux pailles ou aux feuilles d'or une divergence appréciable. Volta a imaginé d'ajouter à l'électroscope un condensa-

[1] *Phil trans. abridged*, vol. XVI, p. 173 (1787).

leur qui permet d'accumuler l'électricité produite par la source et d'obtenir ainsi des divergences beaucoup plus grandes.

L'électroscope condensateur se compose d'un électroscope ordinaire, habituellement à feuilles d'or, dont la boule est remplacée par un plateau métallique A (fig. 116) sur lequel on pose un autre plateau métallique B muni d'un manche isolant; ces deux plateaux sont recouverts d'un vernis à la gomme laque sur les deux faces qui se touchent, et constituent ainsi un condensateur dont la force condensante est très-grande.

Fig. 116.

Pour se servir de cet instrument, on met la source, par exemple une double lame de zinc et de cuivre soudés dont on tient le zinc à la main (fig. 117), en communication avec l'un des plateaux, l'autre plateau communiquant avec le sol. Plus généralement, on met les deux plateaux A et B séparément en communication avec deux corps, dont les potentiels V_1 et V_2 sont différents. Les plateaux se chargent d'électricités contraires; au bout d'un temps variable avec les conditions de l'expérience, mais en général extrêmement court, la même différence de potentiel $V_1 - V_2$ s'établit entre eux, et la valeur absolue de ces potentiels est le plus souvent trop faible pour que les pailles se repoussent d'une manière appréciable. On supprime alors les

Fig. 117.

communications, puis on enlève le plateau supérieur par son manche isolant, l'électricité du plateau inférieur se répand dans les pailles et produit une divergence; le potentiel actuel du plateau inférieur est de même signe que la différence primitive $V_1 - V_2$, et il est égal à cette différence multipliée par la force condensante du condensateur. On reconnaît ensuite la qualité de l'électricité fournie par la source, ou le signe de la différence des potentiels entre les deux corps étudiés, en déterminant par les procédés ordinaires la nature de l'électricité dont les feuilles d'or sont chargées.

Volta avait constaté, par exemple (1), que la force condensante de son appareil était égale environ à 120, de sorte que si une source, mise en communication directe avec l'électroscope, n'est capable de produire qu'une divergence des pailles d'un quart de degré, à peine appréciable, l'emploi de la condensation permettait d'établir sur l'appareil un potentiel 120 fois plus fort et de produire une divergence de 30°, puisque la proportionnalité des déviations aux potentiels existe sensiblement jusqu'à cette distance. De même, si le plateau A seul est chargé d'une quantité d'électricité capable de produire une divergence de 120°, ou plutôt un écart qui correspondrait à 120° d'après la loi de proportionnalité, et qu'on applique sur ce plateau le plateau supérieur B mis en communication avec le sol, le potentiel sur le premier plateau deviendra 120 fois plus faible, et la divergence des pailles ne sera plus que de 1°. C'est là précisément le procédé qu'employait Volta pour mesurer la force condensante de son appareil; il prenait comme source d'électricité une bouteille de Leyde de grandes dimensions, dont la perte était négligeable quand on la mettait en relation avec le condensateur de l'électroscope.

Il peut arriver que le potentiel de la source soit trop faible pour obtenir une déviation suffisante, et que l'emploi de la condensation donne une charge trop forte. Il est facile d'éviter cet inconvénient en faisant empiéter les deux plateaux l'un sur l'autre d'une manière incomplète; la charge du plateau inférieur est à peu près proportionnelle à l'étendue des surfaces en regard. Si,

(1) *Annales de Chimie*, 1re série, t. XL, p. 241.

au contraire, la déviation des pailles est encore très-faible après l'effet de condensation, on peut multiplier cette charge par des opérations analogues à celles que nous décrirons à propos de l'électroscope à trois plateaux de Péclet (268), mais on introduit ainsi de nouvelles causes d'erreur, et il vaut mieux employer une disposition que M. Gaugain appelle *double condensation* (1).

265. **Électroscope à double condensation de M. Gaugain.** — M. Gaugain met en communication avec la source le plateau supérieur A′ (fig. 118) d'un très-petit électroscope condensateur, et le plateau supérieur A d'un condensateur de dimensions beaucoup plus grandes (ce condensateur était formé de deux plateaux carrés de 40 centimètres de côté) ; les deux autres armatures B et B′ restent en communication avec le sol. Supprimant ensuite

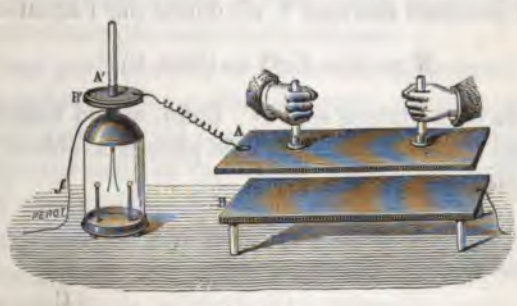


Fig. 118.

la source, on enlève avec des manches isolants l'armature supérieure A du grand condensateur; la plus grande partie de l'électricité que possède ce conducteur se rend sur le plateau A′. On sépare alors ces deux plateaux, puis on supprime la communication f de l'électroscope avec le sol, on soulève le plateau supérieur A′ et on observe la divergence des pailles.

On voit aisément que la sensibilité est ainsi considérablement augmentée, et il est facile d'en faire le calcul. Soient c et C les capacités des deux plateaux A′ et A supposés isolés, et $\mathcal{F}$ la force condensante que nous supposerons la même pour les deux. Si V est le potentiel de la source, la quantité d'électricité m que pren-

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XLVIII, p. 170.

drait le plateau A′ réuni à la source par un fil est

$$m = cV;$$

la charge M que prendraient les deux plateaux A et A′ réunis serait

$$M = (c + C)\,V.$$

La charge que prennent réellement ces deux plateaux sous l'influence de la condensation est

$$M' = (c + C)\,\mathcal{F}V.$$

Dans la deuxième partie de l'opération, quand les deux plateaux du grand condensateur sont séparés, la capacité du conducteur AA′ est devenue $\mathcal{F}c + C$, et, puisque la charge n'a pas changé, le potentiel nouveau V′ est donné par l'équation

$$M' = (c + C)\mathcal{F}V = (\mathcal{F}c + C)V';$$

la charge du petit plateau est $\mathcal{F}cV'$. Enfin, quand toutes les communications seront supprimées et le plateau A′ enlevé, le potentiel V″ du plateau B′ sera

$$cV'' = \mathcal{F}cV'.$$

On en déduit

$$V'' = \mathcal{F}V' = \mathcal{F}V\,\frac{c\mathcal{F} + C\mathcal{F}}{c\mathcal{F} + C} = \mathcal{F}V\,\frac{1 + \dfrac{C}{c}}{1 + \dfrac{C}{c\mathcal{F}}}.$$

Si l'on n'avait employé que la condensation simple, on aurait eu comme potentiel final

$$V''' = \mathcal{F}V.$$

Le bénéfice de la double condensation est donc représenté par le rapport

$$\frac{V''}{V'''} = \frac{1 + \dfrac{C}{c}}{1 + \dfrac{C}{c\mathcal{F}}}.$$

Comme le coefficient $\mathcal{F}$ est toujours très grand, le dénomina-

teur ne diffère pas sensiblement de l'unité; d'autre part, les capacités des plateaux supposés circulaires sont à peu près dans le rapport de leurs diamètres d et D, et l'on peut écrire

$$\frac{V''}{V'''} = 1 + \frac{C}{c}, \quad \text{ou} \quad \frac{V'' - V'''}{V'''} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}.$$

Le rapport de l'accroissement du potentiel à celui que donnerait la condensation simple est donc égal au quotient du diamètre du grand condensateur par le diamètre du plus petit.

266. On comprendra mieux encore l'utilité de cette méthode d'un contact unique si l'on montre par quelques expériences, que nous emprunterons aussi à M. Gaugain, avec quelle facilité les deux couches de vernis peuvent s'électriser par frottement, et quelles précautions il faut prendre pour qu'un électroscope condensateur donne des indications certaines.

Si, avec une peau de chat, on frotte très-légèrement le vernis du plateau inférieur, les pailles divergent aussitôt, et l'on reconnait que l'électricité est négative. Il suffit d'appliquer doucement la main sur toute la surface du vernis pour décharger l'instrument d'une manière complète.

Si le frottement par la peau de chat a été plus long avec une pression plus grande, les pailles divergent davantage et on les ramène encore dans la verticale en touchant la surface du vernis avec la main; mais cette fois l'appareil n'est pas déchargé. Il suffit, en effet, de placer le plateau supérieur et de réunir les deux plateaux avec la main, puis de les séparer de nouveau, pour constater que les pailles se repoussent d'une manière énergique et sont encore chargées d'électricité négative. En appliquant de nouveau la main sur le vernis, on ferait encore baisser les pailles, mais elles se relèveraient encore après une nouvelle opération semblable, et ainsi de suite presque indéfiniment. L'électricité développée par la peau de chat a donc pénétré dans la couche de vernis et le contact de la main ou d'un corps quelconque ne suffit pas pour l'enlever. Dans cet état, l'instrument ne pourrait plus servir et il faudrait attendre longtemps, souvent plusieurs jours, pour qu'il revînt lentement à l'état neutre. On arrive au même résultat d'une manière plus rapide en projetant l'haleine sur le vernis de manière à y déposer une couche

continue de buée ; une ou deux insufflations pareilles suffisent pour ramener le plateau entièrement à l'état neutre. On le vérifie en répétant la même expérience avec le plateau supérieur; les pailles ne divergent plus.

L'expérience suivante démontre d'une autre manière cette pénétration de l'électricité dans la couche isolante. On frotte sur du papier de soie, pendant quelque temps et assez fortement, le plateau supérieur que l'on tient par le manche isolant ; ce plateau se charge d'une grande quantité d'électricité *positive*. On touche avec la main toute la surface du vernis et le plateau ne donne plus de signes d'électricité à un électroscope ordinaire. On le frotte alors légèrement avec une peau de chat et on constate qu'il est chargé d'électricité *négative*. Sans même enlever cette couche négative, on pose ce plateau sur l'autre, on les réunit avec la main, puis on les sépare : les pailles se repoussent violemment et sont *négatives*. Il y avait donc encore dans le vernis du plateau supérieur, au-dessous de la couche superficielle d'électricité négative une quantité beaucoup plus grande d'électricité positive. Cette électricité n'exerçait d'ailleurs aucune action sensible sur les corps extérieurs à cause d'une couche d'électricité contraire qui s'était développée par influence dans le plateau lui-même. Ici encore, une ou deux insufflations de buée suffiront pour faire disparaître toute trace d'électricité.

267. Par suite de ces causes d'erreur, il est donc nécessaire, avant de se servir d'un électroscope condensateur, de vérifier d'abord, par une *manœuvre à blanc*, c'est-à-dire en réunissant les deux plateaux avec la main, puis les séparant, que les pailles ne divergent pas et qu'il n'y a pas d'électricité dans l'épaisseur des vernis. Quand on approche et qu'on sépare les plateaux dans les expériences, il se produit bien des traces d'électricité, par le frottement inévitable des vernis, mais cette électricité est superficielle, se produit toujours à peu près de la même façon et ne gêne pas.

Il en est de même dans l'appareil à double condensation, mais il faut avoir soin, après chaque expérience, de ramener les conducteurs à l'état neutre.

On peut encore craindre que les actions chimiques qui se produisent entre l'air et le métal des plateaux ne soient une cause

d'électricité accidentelle. Pour se mettre à l'abri de cet inconvénient il suffit de vernir les plateaux sur toute leur surface et de souder à chacun d'eux une lame de platine, sur lesquelles on établira les contacts.

268. **Électroscope de Péclet à trois plateaux.** — Nous avons restreint jusqu'à présent l'application des condensateurs à l'étude de l'électricité d'une source, c'est-à-dire d'un phénomène dans lequel l'électricité se reproduit de manière à maintenir constant le potentiel d'un conducteur. La condensation pourrait encore servir si l'on voulait étudier l'électricité répandue sur un corps de grandes dimensions, dont la capacité électrique serait très-grande par rapport à celle de l'électroscope. Le partage qui s'effectuerait alors entre l'appareil et le corps électrisé ne ferait baisser le potentiel sur ce dernier que d'une manière inappréciable et le jeu de l'instrument serait à peu près le même. C'est là le cas de l'électricité atmosphérique, par exemple.

Mais, si l'on veut observer une faible quantité d'électricité répandue sur un corps de petites dimensions, les appareils condensateurs ordinaires n'offrent plus aucun avantage. Péclet (1) a cherché à multiplier cette charge par une série d'influences successives. Son électroscope se compose de trois plateaux : un plateau inférieur A (fig. 119), portant des feuilles d'or comme d'habitude; un plateau supérieur C ordinaire, muni d'un tube de verre D qui permet de l'enlever, et un plateau in-

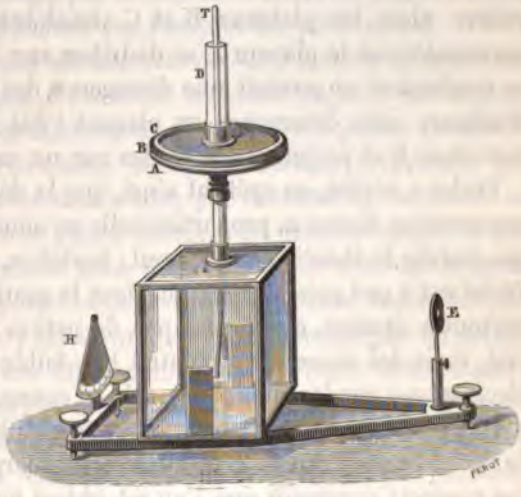


Fig. 119.

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. II, p. 100.

termédiaire B qui est verni sur ses deux faces et dénudé seulement sur la tranche. Ce dernier est muni d'une tige de verre T qui traverse le tube précédent et permet d'enlever en même temps les deux plateaux mobiles.

Si un corps est chargé d'une quantité d'électricité trop faible pour agir d'une manière appréciable sur un électroscope ordinaire, on met ce corps en contact avec le plateau supérieur C, qui prend ainsi par exemple une charge $+m$: c'est cette charge qu'il faut multiplier. On met alors le plateau B en communication avec le sol en touchant la tranche par le doigt ; ce plateau se charge d'une quantité à peu près égale d'électricité contraire $-m$. On enlève le doigt, on soulève le plateau C par le tube et on touche le plateau A : celui-ci se charge alors sous l'influence de B d'une quantité d'électricité à peu près égale à $+m$. Supprimant ce contact et renouvelant la première opération, on produira encore une nouvelle charge $-m$ sur le plateau B, puis une autre $+m$ sur le plateau A. En continuant ainsi, on accumule sur les deux plateaux B et A des quantités d'électricités contraires sensiblement égales et proportionnelles au nombre des contacts. On enlève alors les plateaux B et C simultanément : l'électricité accumulée sur le plateau A se distribue sur toute la surface de ce conducteur et produit une divergence des pailles. On observe d'ailleurs cette divergence en plaçant l'œil derrière une petite ouverture E et projetant les pailles sur un cadran divisé H.

Péclet a vérifié, en opérant ainsi, que la déviation est, jusqu'à une certaine distance, proportionnelle au nombre des contacts, ce qui justifie la théorie de l'appareil ; toutefois, cet électroscope de Péclet est à peu près abandonné. Dans la pratique, ce que l'on a surtout à étudier, ce ne sont pas de petites quantités d'électricité, mais des sources à potentiel très-faible. Il est vrai qu'un électroscope condensateur déjà mis en communication avec une source peut avoir encore une charge trop faible, et l'instrument de Péclet permettrait de multiplier cette charge, mais le nombre des contacts successifs que l'on est obligé de répéter rend l'expérience très-incertaine. En fait, quand l'électroscope à trois plateaux est en bon état dans un air sec, il suffit de faire plusieurs fois de suite la manœuvre indiquée, pour constater de l'électricité dont le signe n'est même pas constant ; cette électri-

cité accidentelle due au frottement inévitable des vernis ou à quelque trace provenant d'expériences antérieures, peut ainsi arriver à dominer le phénomène que l'on étudie et, par suite, à causer des erreurs très-graves.

Si donc on veut observer une quantité d'électricité très-petite, il n'y a pas d'autre moyen sûr que d'employer un instrument assez délicat pour la manifester directement. Si l'on étudie une source trop faible pour donner des indications suffisantes avec un électroscope condensateur ordinaire, il faudra avoir recours à un procédé analogue à la double condensation de M. Gaugain, et éviter avec soin de multiplier les contacts entre des substances isolantes.

269. **Électroscope de Behrens.** — Tous les électroscopes qui précèdent ne donnent que des indications discontinues, c'est-à-dire que, pour déterminer la nature de l'électricité qui se trouve sur un corps, il faut toujours faire deux expériences : par exemple, charger d'abord l'instrument d'une électricité connue et en approcher ensuite le corps à étudier. Il serait important que la charge de l'électroscope pût se conserver indéfiniment et c'est là ce que Behrens [1] a réalisé par l'emploi des *piles sèches*.

270. Une pile sèche est une pile de Volta formée de corps qui renferment assez peu d'humidité et entre lesquels les actions chimiques sont assez faibles pour que l'appareil puisse conserver pendant un temps très-long un état électrique invariable. Les premières piles sèches construites par Hachette et Desormes se composaient d'un très-grand nombre de disques formés d'une lame de cuivre et d'une lame de zinc réunies avec de la colle d'amidon et superposés toujours dans le même ordre. La pile sèche de Zamboni [2] est formée plus simplement par du papier recouvert sur une des faces d'une feuille d'étain et sur l'autre face d'une couche mince de bioxyde de manganèse pulvérisé. On découpe dans ce papier un grand nombre de rondelles que l'on superpose toujours dans le même sens, de façon, par exemple, que l'étain de chaque rondelle soit à la partie supérieure. On applique sur les deux extrémités de cette colonne des plaques de métal que l'on relie l'une à l'autre par des cordons de soie

[1] Gilbert, *Ann. der Physik.*, t. XXIII, p. 25.
[2] ***Annales de Chimie et de Physique***, 2e série, t. XI, p. 190.

et on couvre toute la surface, sauf les conducteurs extrêmes, d'une couche épaisse de soufre ou de gomme laque.

Sans insister pour le moment sur la théorie de cet instrument, nous pouvons en constater les propriétés. Si la pile est isolée depuis quelques temps, les deux conducteurs extrêmes, ou les deux *pôles*, sont chargés d'électricités contraires, l'une positive, l'autre négative, en quantités égales : ces électricités se reproduisent plus ou moins lentement quand on décharge les pôles en les reliant avec le sol. Plus généralement, la pile établit une différence de potentiel déterminée entre deux conducteurs avec lesquels ses pôles communiquent séparément. Si l'un de ces conducteurs est amené au potentiel zéro par une communication avec le sol, l'autre conducteur prend un potentiel double en valeur absolue, de façon que la différence n'est pas modifiée. Cette différence de potentiel est d'ailleurs proportionnelle au nombre des éléments qui constituent la pile et indépendante de leur épaisseur. Comme chaque élément de la pile ne produit qu'un effet très-faible, il faut en prendre un grand nombre : les piles sèches que l'on construit habituellement renferment 500 ou 1000 éléments formés de rondelles tellement minces, que la longueur totale de la colonne ne dépasse pas 10 ou 20 centimètres.

On conçoit le parti que l'on peut tirer de ces piles pour maintenir une charge électrique constante malgré la déperdition par l'air, pourvu toutefois qu'on ne dépense pas l'électricité plus rapidement qu'elle ne peut se reproduire. On construit, par exemple, des appareils à rotation continue ou à oscillations pendulaires, analogues au tourniquet électrique ou au carillon électrique, dont le mouvement est entretenu par l'électricité d'une pile sèche. Delezenne avait ainsi un appareil à rotation qui a marché pendant 28 ans sans aucune interruption. Le cabinet de physique du Collége de France possède une pile sèche qui porte la date de 1827 et qui donne encore en 1875, c'est-à-dire au bout de 48 ans, des effets énergiques. Toutefois, les piles sèches s'épuisent peu à peu, soit à cause de l'humidité qu'elles perdent lentement, soit surtout par suite des réactions chimiques qui accompagnent toujours la production d'électricité et qui modifient l'état des substances en contact. Mais, ce qui est plus grave, l'énergie de la pile éprouve aussi des changements irréguliers, elle s'exa-

gère par une élévation de température et diminue par le froid ; cette circonstance empêche qu'on y ait recours dans des expériences de mesure, mais elle ne présente aucun inconvénient quand il s'agit d'observations qualitatives.

271. L'électroscope de Bohnenberger (1), qui n'est qu'une modification de l'appareil de Behrens, se compose de deux piles sèches P et P′ (fig. 120) dont les pôles de noms contraires sont réunis à la partie inférieure à l'aide d'une lame de métal qui communique avec le sol d'une manière permanente par le pied de l'instrument. Ces deux piles se terminent à la partie supérieure par deux boules *a* et *b* qui sont aussi des pôles de noms contraires ; elles forment donc comme une pile unique dont le milieu est maintenu au potentiel zéro et dont les extrémités auront par conséquent des potentiels égaux et de signes contraires et seront chargées d'électricités différentes. Entre ces deux boules une feuille d'or unique *f* est suspendue à un conducteur D mastiqué dans la tubulure d'une cloche C en verre, comme dans les électroscopes ordinaires. Si cette feuille d'or est à l'état neutre et à égale distance des pôles de la pile, elle restera en équilibre ; mais cet équibre serait instable si le poids de la feuille ne contribuait pas à la maintenir dans la verticale.

Fig. 120.

Quand on approche du bouton supérieur D un corps électrisé d'une manière quelconque, la feuille s'électrise par influence de même électricité et s'incline aussitôt, parce qu'elle est attirée par l'un des deux pôles *a* ou *b* et repoussée par l'autre. Il suffit donc d'avoir marqué, une fois pour toutes, le sens dans lequel se déplace la feuille, sous l'influence d'une électricité de signe connu, pour reconnaître immédiatement la nature de l'électricité qui se trouve sur un corps quelconque. Lorsque la feuille est verticale, l'action exercée sur elle par chacun des deux pôles est

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XVI, p. 91.

proportionnelle à la charge de la feuille d'or, à la charge électrique de chacune des deux boules *a* et *b*, et d'autant plus grande que la distance est plus faible. On pourrait donc augmenter la sensibilité presque sans limite en augmentant le nombre des éléments de la pile, en terminant les pôles par deux disques conducteurs verticaux perpendiculaires au plan dans lequel se meut la feuille d'or et en rapprochant ces disques de plus en plus. Il est bon d'ailleurs que les conducteurs qui terminent les pôles de la pile soient mobiles pour que l'on puisse modifier facilement la sensibilité de l'appareil.

On construit souvent cet électroscope d'une manière plus simple, en n'employant qu'une seule pile dont les deux pôles communiquent avec deux conducteurs *a* et *b* placés de part et d'autre de la feuille d'or. Cette disposition présente l'inconvénient que les deux pôles de la pile n'ont pas toujours des potentiels égaux et de signes contraires ; il peut arriver alors que la feuille d'or se maintienne déviée d'un certain côté, même quand elle n'est pas électrisée ou quand on la met en communication avec le sol. Il faudrait avoir soin dans ce cas de maintenir le milieu de la pile au potentiel zéro en le reliant avec le sol d'une manière permanente par un fil conducteur.

272. **Électromètre à feuille d'or de Hankel.** — M. Hankel [1] a fait de cet appareil un électromètre très-délicat. La feuille d'or est suspendue entre deux plateaux conducteurs verticaux et parallèles A et B (fig. 121), disposition qui avait été employée par Fechner. Ces deux plateaux sont portés par des tiges isolantes et peuvent être rapprochés ou écartés de quantités connues à l'aide de vis micrométriques. La pile sèche, dont l'état électrique n'est pas constant, est remplacée par une série d'éléments de Volta, formés de zinc et de cuivre plongés dans de l'eau ordinaire, et, au lieu de constater simplement le sens dans lequel se dévie la feuille d'or, on mesure son déplacement par un microscope M à échelle divisée. La cage est formée d'une lame de métal recourbée, sur les bords de laquelle sont appliquées deux glaces, et, pour éviter toute action perturbatrice provenant de l'extérieur, l'instrument est recouvert d'une boîte en fer-blanc

[1] *Pogg. Ann.* T. CIII, p. 209 (1858).

où l'on n'a laissé que les ouvertures nécessaires pour l'éclairage et les observations. Des dispositions de conducteurs très-simples, qu'il est inutile de décrire, permettent de faire communiquer séparément les deux plateaux avec les deux pôles de la pile, d'intervertir les communications par un commutateur, de mettre les plateaux en communication avec le sol, et de relier la feuille d'or soit avec le sol, soit avec un des pôles de la pile, soit avec un corps électrisé.

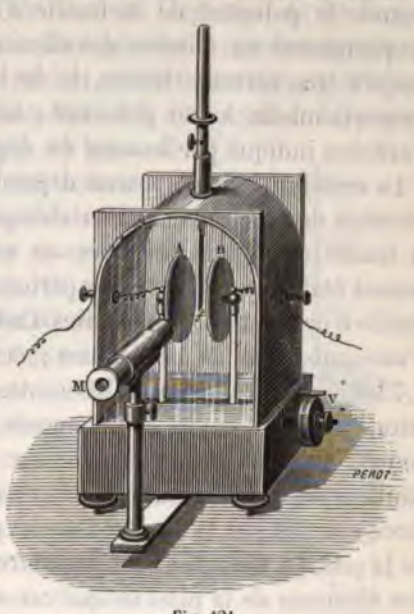


Fig. 121.

Cet électromètre peut ainsi être employé dans des conditions très-variées, mais la disposition la plus avantageuse consiste à relier les plateaux aux deux pôles de la pile, la feuille d'or étant électrisée, et d'observer la déviation. Pour éviter l'erreur qui serait due à l'évaluation inexacte du zéro, on observe le double de la déviation en intervertissant le rôle des plateaux par le jeu du commutateur. Il est nécessaire que le milieu de la pile principale qui sert à charger les plateaux communique avec le sol.

On gradue l'électromètre en donnant à la feuille d'or des charges différentes par l'un des pôles d'une pile auxiliaire dont l'autre pôle n'est pas isolé. Dans ce cas, on reconnaît que la déviation de la feuille d'or est proportionnelle au nombre des éléments de la pile auxiliaire, jusqu'à une certaine limite, à partir de laquelle les déviations croissent plus rapidement; cette limite dépend de la forme et de la distance des plateaux.

On peut prendre comme pile auxiliaire, soit de petits éléments Daniell, soit des éléments de Volta ; mais ceux-ci exigent plus de précautions, il faut avoir soin de ne jamais fermer la pile et

même de ne pas toucher les pôles avec les doigts. Il est bon d'ailleurs de charger la feuille d'or alternativement avec les deux pôles de la pile et de prendre la moyenne des observations. Comme le potentiel de la feuille d'or, en valeur absolue, est proportionnel au nombre des éléments de la pile, on voit que, jusqu'à une certaine limite, la déviation de la feuille d'or est proportionnelle à son potentiel : le signe de ce potentiel est d'ailleurs indiqué par le sens du déplacement.

[illegible] de l'appareil dépend de la distance et de l'électrisation des plateaux. Si l'on change la distance des plateaux, [illegible] toujours au milieu, il faut comparer ce [illegible] l'expérience indique que l'écart de la [illegible] d'ailleurs, est en raison inverse [illegible] cette puissance a été 1,56 et [illegible] différents. Mais il est plus simple de [illegible] les éléments de la pile principale. Dans [illegible] pour une position donnée de la [illegible] distribuées de la même manière, et la [illegible] est proportionnelle au potentiel [illegible] doit donc être proportionnelle au nombre [illegible] qui est confirmé par l'observation ; [illegible] sur ce calcul.

[illegible] ÉLECTRIQUES-BALANCES.

[illegible] de Le Roy et d'Arcy. — Ellicot, en [illegible] l'électrisation d'un corps en [illegible] plateau de balance et déterminant le poids [illegible] plateau ferait équilibre à l'attraction [illegible]

[illegible] construisirent un aréomètre électrique [illegible] qui s'exerce entre deux conducteurs est [illegible] par un certain poids. On conçoit, en effet, que si

[illegible]

n aréomètre conducteur flotte dans un liquide électrisé, il se roduira, entre la tige de l'aréomètre et le liquide ou le vase qui : contient, une répulsion qui aura pour effet de relever la tige t de changer le point d'affleurement. L'appareil de Le Roy et 'Arcy (fig 122) se composait d'un réservoir en verre contenant n peu de mercure comme lest et portant une tige cylindrique e laiton T d'une ligne de diamètre et de 12 pouces de longueur, rminée par un petit disque de laiton D e 14 lignes de diamètre. Cet aéromètre tait placé dans un vase conducteur ren-rmant de l'eau et fermé par un couvercle ercé d'une large ouverture. Pour éviter ue l'aréomètre ne fût rejeté latéralement, n avait tendu au-dessus de l'ouverture du ouvercle quatre fils d'argent croisés entre squels la tige était maintenue.

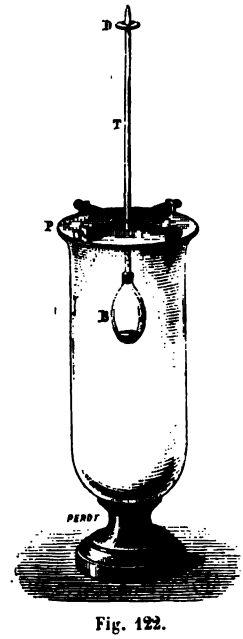


Fig. 122.

Le vase étant porté par une colonne en erre, quand on le mettait en communica-on avec une machine électrique, la tige soulevait et on évaluait le déplacement en bservant le disque D au travers d'une lame e verre sur laquelle étaient tracées des di-isions. « L'électricité, disent-ils, fait fonc-on d'une puissance comme la poussée, et le est proportionnelle au déplacement. » n'est là, en réalité, qu'un électroscope u'il serait nécessaire de graduer expé-mentalement; mais, pour en faire un appareil de mesures, suffirait de déterminer dans chaque expérience le poids u'il faudrait ajouter au plateau D pour ramener l'affleurement u point où il était à l'état neutre. La distance de la tige obile aux pièces qui agissent sur elle étant alors constante, force électrique serait proportionnelle au produit des char-es des deux corps et, par suite, au carré du potentiel de la ource.

274. **Bascule à décharges de Cuthbertson.** — Cet appareil, qui epose aussi sur la comparaison directe des poids aux forces lectriques, permet d'obtenir spontanément la décharge d'un

conducteur lorsque le potentiel a atteint une certaine valeur. Un fléau conducteur B*b* (fig. 123), terminé par des boules de métal, tourne autour d'une arête de couteau située dans l'intérieur d'une boule conductrice C, laquelle communique par un conducteur D*a* avec un corps électrisé ; au-dessous de la boule B est une autre boule de métal A communiquant avec le sol ; enfin, un curseur *m* mobile sur le fléau permet d'exercer une certaine pression entre les deux boules *a* et *b*. Lorsque l'appareil est électrisé, il se produit entre les boules *a* et *b* une répulsion proportionnelle au carré du potentiel, et, entre les boules A et B, une attraction proportionnelle aussi au carré du potentiel. Lorsque la résultante de ces deux actions est suffisante, le fléau bascule, et l'appareil se décharge par une étincelle entre les boules A et B. Si l'on détermine d'abord la position du curseur pour laquelle le fléau se tient en équilibre, le carré de potentiel nécessaire pour produire une décharge sera proportionnel à la distance du curseur à cette position.

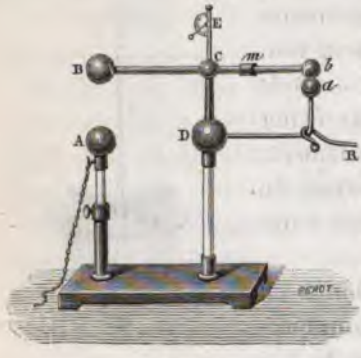


Fig. 123.

275. **Balances électriques de M. Harris.** — M. Harris (1) a employé dans certaines expériences deux appareils qui peuvent être considérés comme des modifications de ceux que nous venons d'indiquer.

L'un d'eux (fig. 124) est formé d'une poulie très-légère P, munie d'une aiguille I qui se meut devant un cadran divisé, et dont l'axe repose sur les jantes croisées de poulies plus petites, comme dans la machine d'Atwood. Sur la circonférence de cette poulie passe un fil d'argent qui porte un petit cône de bois doré *b* terminé par un disque horizontal ; au-dessous est placé un autre conducteur semblable *a* porté sur un pied en verre et muni d'une tige latérale par laquelle on peut

(1) *Phil. trans.* (1834), part. II, p. 215.

l'électriser. De l'autre côté de la poulie est un cordon de soie, qui soutient un flotteur cylindrique F plongeant dans l'eau et muni d'un petit plateau Q. Le conducteur *b* peut communiquer avec le sol par le fil de métal et la colonne qui supporte la poulie.

L'appareil étant à l'état neutre, on l'équilibre de manière à amener l'aiguille I au zéro de la graduation en ajoutant des poids convenables dans le plateau Q. Si l'on électrise alors le conducteur *a*, par exemple en le touchant avec un disque électrisé D, il attire l'autre; l'équilibre est détruit, mais il reste stable à cause du flotteur qui émerge en partie du liquide. On ajoute alors des poids dans le plateau Q jusqu'à ce que l'aiguille revienne au zéro, et ces poids représentent l'attraction qui s'exerce entre les conducteurs *a* et *b*. L'attraction est proportionnelle au carré de la charge quand la distance reste constante; on peut d'ailleurs modifier cette distance en élevant ou abaissant le conducteur *a* à l'aide d'un support à vis. L'appareil construit par M. Harris était tellement sensible qu'il indiquait encore $\frac{1}{50}$ de grain (environ 1 milligr.) lorsque la charge était de 500 grains. L'inconvenient le plus grave que présente cet instrument est le changement de forme que peut éprouver la surface du liquide, suivant que le flotteur monte ou descend,

Fig. 124.

d'où peuvent résulter des altérations notables de forces capillaires.

276. Dans un autre appareil de M. Harris, le conducteur mobile d (fig. 125) est suspendu par un fil d'argent à un fléau de balance qui communique encore avec le sol et porte un plateau P à l'autre extrémité. Ce plateau peut reposer sur un plateau fixe V

Fig. 125.

et la balance est équilibrée de façon que les deux plateaux P et V soient en contact sans pression quand les conducteurs ne sont pas électrisés. On met ensuite une surcharge dans le plateau P, et on électrise le conducteur a jusqu'au moment où le plateau mobile commence à se détacher; la surcharge est alors égale à l'attraction électrique qui s'exerce entre les conducteurs d et a.

277. **Balance de M. W. Thomson.** — Les balances de M. Harris ne sont guère susceptibles de graduations théoriques, parce que les disques attractifs ont des dimensions trop petites par rapport à la distance qui les sépare et qu'il serait fort difficile de calculer

la force qui s'exerce entre eux. M. Thomson a construit, d'après le même principe, des instruments qui permettent d'évaluer les forces et les potentiels électriques en unités absolues. Après avoir essayé de diverses manières l'attraction de deux sphères pour laquelle il avait calculé des tables, M. Thomson en est revenu à l'emploi de plateaux parallèles très-larges, disposition qui avait déjà été employée par Volta (1), et qui permet de calculer les forces d'une manière très-simple.

En effet, si deux plateaux conducteurs parallèles sont assez grands, par rapport à la distance qui les sépare, pour que la distribution de l'électricité soit la même que s'ils étaient infinis, les surfaces en regard de ces deux plateaux auront des charges égales d'électricités contraires, et la densité μ sera constante au moins pour tous les points qui ne seront pas très-rapprochés des bords. Soit D la distance des plateaux, et V la différence de leurs potentiels, la densité μ est donnée (178) par l'équation

$$4\pi\mu = \frac{V}{D}.$$

D'autre part, l'action qui s'exerce sur l'unité de surface de l'un des plateaux est $2\pi\mu^2$ (58), et, en appelant S l'étendue de ce plateau, l'action totale est $2\pi\mu^2 S$. Si l'on désigne cette force par F, on a donc, en tenant compte de l'équation précédente,

$$F = 2\pi\mu^2 S = 2\pi S \frac{V^2}{16\pi^2 D^2} = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V}{D}\right)^2.$$

En déterminant cette force F par expérience, on en déduira la valeur absolue de la différence des potentiels V en fonction de quantités connues,

$$V = D\sqrt{\frac{8\pi F}{S}}.$$

On a négligé seulement dans ce calcul l'action qui s'exerce sur la face extérieure du plateau mobile, mais cette force est, en général, négligeable, parce que la densité sur la face exté-

(1) *Collezione dell' opere*, T. I, part. II, p. 67.

rieure est très-faible par rapport à celle qui existe sur l'autre face.

278. L'instrument dont s'est servi d'abord M. Thomson était formé de deux plateaux métalliques horizontaux, l'un fixe et isolé, l'autre, d'un diamètre un peu plus petit, attaché par une tige de métal à l'extrémité d'un fléau de balance. Ces deux plateaux étaient entourés par une cage métallique, tant pour éviter les courants d'air que pour empêcher l'action électrique de tout corps extérieur. La cage, non isolée, communiquait avec le plateau supérieur par un fil de métal assez flexible pour ne pas nuire aux oscillations de la balance; elle était percée latéralement d'un trou par lequel passait une tige de métal en communication avec le plateau inférieur.

La tige du plateau mobile portait une division en centièmes de pouce ($0^{mm},254$), et, en visant cette division avec une lunette, on pouvait apprécier un déplacement de $\frac{1}{40}$ de millimètre. Comme l'attraction des plateaux tend à produire un équilibre instable, il était nécessaire de limiter les oscillations du fléau par deux arrêts qui ne permettaient qu'un très-petit déplacement.

La balance étant en équilibre et les plateaux à l'état neutre, on établissait entre eux une différence de potentiel, et on déterminait les poids nécessaires pour ramener la balance à sa position primitive, malgré l'attraction électrique. M. Thomson a trouvé ainsi qu'à la distance de $2^{mm},54$ l'attraction produite entre les plateaux par une différence de potentiel équivalente à celle de 1000 éléments Daniell était de $0^{gr},965$. Le diamètre du plateau mobile étant de $14^{c},88$, la surface était de 174 centimètres carrés, ce qui donne, par décimètre carré, une attraction de $0^{gr},554$. Enfin, comme l'action est en raison inverse du carré de la distance des plateaux, on peut conclure de là que, si les deux pôles d'une pile de Daniell communiquent séparément avec deux plateaux parallèles distants d'un millimètre, l'attraction des plateaux sera de $5^{gr},57$ par décimètre carré. Des expériences ultérieures faites par M. Thomson dans de meilleures conditions ont porté ce nombre à $5^{gr},70$.

279. En toute rigueur, les raisonnements qui précèdent ne sont exacts que pour des plateaux infiniment grands par rapport à leur distance, ce qui ne saurait être réalisé, et, d'autre part,

la mesure de la distance des plateaux devient très-difficile quand ils sont très-rapprochés. M. Thomson évite ce dernier inconvénient en mesurant, non pas la distance elle-même, mais le changement qu'elle éprouve par une même force attractive lorsque la différence des potentiels est modifiée.

Pour un premier état de l'appareil, on aura

$$V = D\sqrt{\frac{8\pi F}{S}}.$$

Par une autre distance D′ des plateaux, la différence des potentiels V′ qui correspond à la même attraction F sera

$$V' = D'\sqrt{\frac{8\pi F}{S}},$$

ce qui donne

$$V' - V = (D' - D)\sqrt{\frac{8\pi F}{S}};$$

la variation de la différence des potentiels est proportionnelle au changement de distance des plateaux, lequel est facile à mesurer.

280. **Électromètres absolus de M. Thomson.** — Mais le plus grand perfectionnement apporté à la construction de ces instruments a consisté à rendre mobile seulement la partie centrale de l'un des plateaux (1). L'électromètre absolu se composera donc essentiellement de deux plateaux conducteurs parallèles A et B (fig. 126). Le plateau inférieur A est porté par des supports isolants; on peut l'élever ou l'abaisser d'une quantité connue, à l'aide d'une vis micrométrique. Le plateau

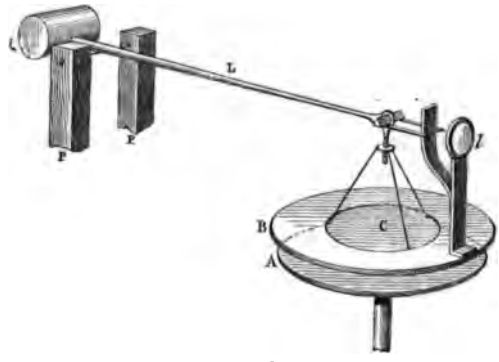


Fig. 126.

(1) *Reprint of papers*, p. 285.

supérieur est percé en son milieu d'une ouverture circulaire dans laquelle est ajusté, sans frottement, un disque mobile C; ce disque est amené, pour chaque expérience, exactement dans le plan de la couronne fixe qui l'entoure et avec laquelle il est constamment en communication, de manière à former un plan conducteur continu. De cette façon, la distribution de l'électricité sur le disque mobile sera exactement la même que s'il faisait réellement partie d'un plan très-étendu, et la densité électrique sera constante sur toute sa surface. La couronne extérieure B a donc pour effet de conserver une densité constante en tous les points du disque et, en raison de cette fonction, M. Thomson l'appelle *plateau de garde* (*guard-plate*). Le plateau fixe A et le disque C étant mis séparément en communication avec deux corps dont les potentiels sont V_1 et V_2, on déterminera la force F qui s'exerce sur le disque, à une certaine distance D, et on appliquera les formules précédentes. Il importe seulement que la distance du disque au plateau de garde soit très-faible; quant à la distance des deux plateaux A et B, elle peut être égale ou même supérieure au diamètre du disque, sans que les raisonnements cessent d'être applicables.

281. On peut évaluer cette force par des procédés très-différents. Dans la figure 126, par exemple, le disque est suspendu, par des fils de métal, à un levier de métal L, qui est équilibré par un contre-poids Q et tourne autour d'un fil métallique, tendu sur deux supports conducteurs, reliés eux-mêmes au plateau de garde. Le levier se termine par une fourchette qui porte un cheveu tendu horizontalement. La fourchette laisse passer une tige fixe, sur laquelle sont marqués deux points noirs, que l'on observe avec une petite loupe *l*. L'appareil est réglé de façon que le cheveu soit exactement entre les deux repères, lorsque le disque et le plateau de garde forment un même plan.

Pour se servir de cet appareil, on met sur le disque un poids *p* et, à l'aide d'un cavalier posé sur le levier L, on établit l'équilibre, les deux plateaux A et B étant en communication l'un avec l'autre; la force électrique est alors nulle. Pour déterminer la différence des potentiels V_1 et V_2 de deux corps différents, on peut mettre ces deux corps en communication respectivement avec les deux plateaux; mais il vaut mieux opérer autrement.

afin de n'avoir pas à déterminer des distances absolues. Le plateau fixe, par exemple, sera maintenu à un potentiel constant V, soit par une bouteille de Leyde, soit par l'un des pôles d'une pile dont l'autre pôle communique avec le sol. On enlève le poids additionnel p, on relie le plateau de garde avec le corps dont le potentiel est V_1, et, avec la vis micrométrique, on déplace le plateau A, jusqu'à ce que l'équilibre soit rétabli. Si la distance des plateaux est alors égale à D, on a

$$V - V_1 = D\sqrt{\frac{8\pi p}{s}},$$

s désignant la surface du disque mobile. On met ensuite le plateau de garde en communication avec le deuxième corps, et on rétablit de nouveau l'équilibre, ce qui donne

$$V - V_2 = D'\sqrt{\frac{8\pi p}{s}}.$$

On en déduit

$$V_1 - V_2 = (D' - D)\sqrt{\frac{8\pi p}{s}},$$

et cette formule ne renferme que le déplacement $D' - D$ du plateau, lequel est donné directement par la vis micrométrique.

Il est clair que l'appareil doit être soustrait aux courants d'air et placé dans une atmosphère bien desséchée, pour éviter les déperditions; mais nous n'avons voulu d'abord qu'indiquer le principe.

282. M. Thomson a donné à ces instruments des formes très-variées. Dans l'appareil le plus complet [1] (*nouvel électromètre absolu*) (fig. 127), nous trouverons trois organes nouveaux, qui ont pour but de rendre les différentes observations directement comparables entre elles; ce sont : 1° *une bouteille de Leyde*, par laquelle on obtient le potentiel auxiliaire V; 2° *un reproducteur de charge* (*replenisher*), qui a pour but d'ajouter ou d'enlever de l'électricité à la bouteille, de manière à amener son potentiel à une valeur constante; 3° *une jauge* (*idiostatic gauge*), qui per-

[1] *Reprint of papers*, p. 287.

met de reconnaître si le potentiel a atteint la valeur qui convient.

Toutes ces pièces sont renfermées dans un cylindre de verre en fini mant, fermé en haut et en bas par des plaques de métal. Les deux surfaces de ce cylindre sont recouvertes, à la hauteur des plateaux attractifs, de deux bandes d'étain collées : l'une intérieure, qui communique avec le plateau de garde B, l'autre extérieure, qui communique avec le sol. Ces deux bandes forment les armatures d'une sorte de bouteille de Leyde; elles sont d'ailleurs percées d'ouvertures qui laissent passer la lumière et permettent d'observer les pièces intérieures.

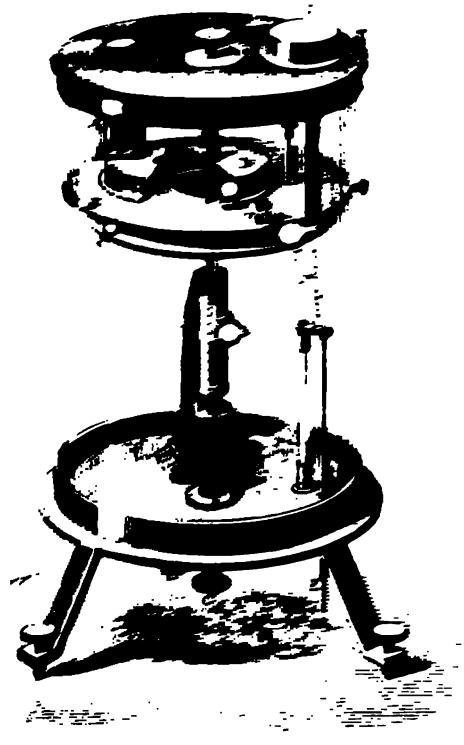


Fig. 127.

Le plateau de garde porte une tige de métal terminée par un disque F, qui agit sur la jauge idiostatique J.

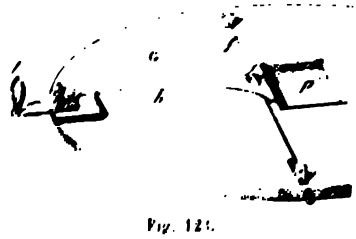


Fig. 128.

285. La *jauge* (fig. 128) est formée par une petite plaque carrée d'aluminium *p*, mobile dans une cavité correspondante d'un plateau conducteur. Cette plaque est munie d'une longue queue *h*, termi-

un cheveu horizontal; elle tourne autour d'un petit
.tine horizontal *f*, qui est attaché par ses deux extré-
ı plateau et traverse la queue par deux petits trous
quels est un pli en forme de gaufrage; par cette dispo-
ı tension du fil tend à ramener la plaque dans une posi-
rminée. Lorsque le disque inférieur F, qui communique
mature intérieure de la bouteille de Leyde, est électrisé,
la plaque d'aluminium et, pour que le potentiel de cette
e soit le même dans différentes expériences, il faut que
on exercée sur la plaque amène le cheveu entre deux
ce qu'on observe avec une loupe *l*. Si le potentiel est trop
trop faible, le cheveu sort des repères, et on l'y ramène
fiant la charge par le reproducteur. Il y a d'ailleurs
its butoirs qui empêchent la jauge d'éprouver de trop
léplacements, de sorte que le cheveu ne sort pas du
le vision de la loupe.

Le *reproducteur* se compose de deux conducteurs A et B (fig. 129), formés de deux portions d'un même , munis l'un et l'autre, ur partie concave, de e ressort *a* et *b*, et com- ant, l'un avec l'armature re de la bouteille de l'autre avec l'armature re, c'est-à-dire avec le re. ces deux armatures, ıx autres ressorts C et D, ır un fil de métal. Enfin, aques de métal P et Q achées par une baguette

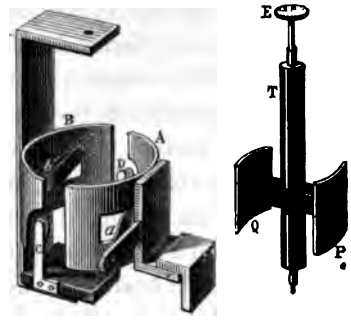


Fig. 129.

ale en caoutchouc durci (ébonite) à une tige verticale T
. ébonite, placée dans l'axe des conducteurs A et B et
être mise en mouvement dans un sens ou dans l'autre,
bouton extérieur E. Le jeu de cet appareil ingénieux est
ple.

ɔsons que le conducteur A, qui communique avec l'arma-
érieure, soit chargé d'électricité positive, et que l'on
ırner les plaques P et Q dans un certain sens, de façon

que l'une d'elles touche successivement les ressorts *a*, D, *b*, C; au moment où l'une des plaques quitte le ressort *a*, elle est à l'état neutre, parce qu'elle se trouve dans l'intérieur d'un conducteur avec lequel elle communique; en touchant ensuite le ressort D, elle fait partie du conducteur CD et prend, sous l'influence de A, de l'électricité négative, qu'elle porte, par le ressort *b*, au conducteur B, c'est-à-dire au sol; puis elle prend au contact du ressort C de l'électricité positive, qu'elle apporte par le ressort *a* au conducteur A dont la charge se trouve augmentée. Elle quitte de nouveau ce ressort à l'état neutre, puis y rapporte après une révolution complète une nouvelle quantité d'électricité positive, et ainsi de suite. Cette manœuvre aura donc pour effet d'augmenter de plus en plus la charge électrique ou le potentiel du conducteur A et de l'armature intérieure de la bouteille. Une rotation en sens contraire, comme on le voit aisément, ferait diminuer le potentiel d'une manière continue, et l'on s'arrêtera quand le cheveu de la jauge sera exactement entre ses repères.

285. L'attraction du disque mobile dans l'électromètre absolu (fig. 127) est équilibrée, non par des poids, mais par des ressorts d'acier. Ce disque est formé d'une lame d'aluminium de 46 millimètres de diamètre, renforcée, sur sa face supérieure, par des lamelles verticales disposées en rayons; il est relié au plateau de garde par un ressort à boudin très-léger, et suspendu, par l'intermédiaire de trois ressorts d'acier en lames et d'une tige isolante, à une glissière mobile le long d'une échelle divisée, glissière que l'on peut élever ou abaisser par une vis micrométrique C. Le disque porte un cheveu horizontal, dont une lentille *l* produit une image réelle dans le voisinage des bords de la cage; on examine cette image avec une loupe *l'* et on la maintient entre deux repères V. Enfin, une boîte métallique circulaire D, formée de deux parties qui se rapprochent, est posée sur le plateau de garde et recouvre le disque mobile, en laissant passer seulement la tige; cette boîte préserve le disque de toute action électrique extérieure. Le plateau A est porté de même, par l'intermédiaire d'une tige isolante, sur une glissière qui se meut, par une vis micrométrique C', le long d'une échelle divisée *m*. Une tige de métal E portée par un pied en verre, traverse une ouverture ménagée dans la base, et

permet d'électriser le plateau A par l'extérieur; nous l'appelerons une *électrode*.

286. Avant de se servir de l'instrument, il faut d'abord graduer les ressorts d'acier. L'appareil étant à l'état neutre et le disque mobile amené par le bouton supérieur dans sa position normale, on pose des poids sur cette plaque, le plus symétriquement possible, et on détermine le nombre de tours et de fractions de tour de la vis C nécessaires pour ramener l'image du cheveu entre ses repères. On constate ainsi que, dans les limites où l'appareil doit fonctionner, la charge est proportionnelle à l'écartement vertical des lames de ressort, et on détermine la charge qui correspond à un tour de vis.

Cela étant, on soulève le disque, par la vis C, d'une quantité déterminée, et l'on connaît l'attraction F qui sera nécessaire pour le ramener dans sa position normale. L'armature extérieure communiquant avec le sol, on charge l'armature intérieure, puis on agit par le reproducteur R, jusqu'à ce que le cheveu de la jauge J soit entre ses repères. On met ensuite, par l'électrode E, le plateau inférieur A en communication successivement avec deux corps dont on veut déterminer la différence des potentiels V_1 et V_2, et, par la vis inférieure C', on élève ou abaisse le plateau A, de façon que dans les deux cas le disque mobile soit ramené dans sa position normale; la distance D' — D des deux positions du plateau, pour les deux expériences, donne (281) la différence des potentiels par la formule

$$V_1 - V_2 = (D' - D)\sqrt{\frac{8\pi F}{s}},$$

si la charge intérieure a été maintenue constante.

Ajoutons encore que l'on place dans cet appareil des corps desséchants, comme de la pierre ponce imbibée d'acide sulfurique, pour maintenir la surface du cylindre de verre parfaitement sèche et isolante.

287. Cet électromètre absolu pourra servir à graduer d'autres instruments à indications arbitraires. Tel est, par exemple, un appareil appelé par M. Thomson *électromètre portatif* (fig. 130), qui se compose essentiellement d'une jauge placée au fond d'un

communiquant avec une garniture d'étain, qui ... de la surface intérieure (1).

... extérieure est de même garnie de feuilles d'étain ... la seconde armature. Le plateau attractif A est ... par une vis micrométrique C et communique avec une électrode extérieure que l'on peut recouvrir par un chapeau D. Dans la bouteille est suspendue une coupe annulaire, renfermant de la pierre ponce P imbibée d'une quantité d'acide sulfurique assez petite pour que les fragments ne paraissent pas mouillés. Ce moyen de dessiccation paraît être le meilleur, l'armature intérieure ne perd pas plus de $\frac{5}{100}$ de sa charge en huit jours; mais il est nécessaire de dessécher la pierre ponce au moins une fois par mois. La ... dans ces appareils de M. Thomson, est tellement bien équi... que le cheveu n'éprouve aucun déplacement quand on ... instrument dans une position quelconque, droite ou ren...

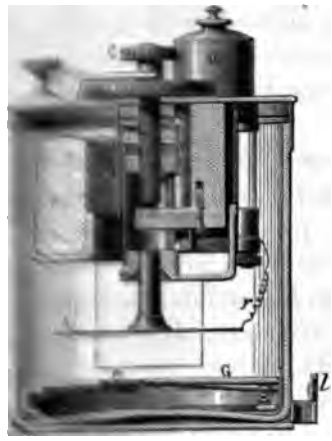


Fig. 150.

... armature intérieure étant électrisée, par exemple par un ... phore, et de préférence, d'après M. Thomson, d'électricité ..., on met d'abord l'électrode en communication avec ... armature extérieure et avec le sol, et on observe le déplace... de la vis nécessaire pour amener le cheveu entre ses re... ; on met ensuite cette électrode en communication avec ... que l'on veut étudier, et l'on fait une nouvelle lecture; ... recommence la lecture relative au sol : la différence ... de ces observations donnera, par la table de gradua... potentiel cherché.

... citons encore *l'électromètre à grande échelle* (*long rang*

... n'est pas complète et ne s'élève pas au-dessus de la jauge. ... mobile serait dans l'intérieur d'un conducteur et la densité ... serait nulle.

electrometer), destiné à la mesure des potentiels très-élevés. Ici le plateau attractif A (fig. 131), placé à la partie supérieure, est isolé par des pieds en verre. Le plateau de garde B, avec la palette d'aluminium qui constitue une jauge, est porté par un support métallique communiquant avec le sol et commandé par une vis à course plus rapide. La palette d'aluminium est abattue lorsque l'appareil est à l'état neutre, et, quand le plateau A est électrisé, on déplace le plateau de garde, jusqu'à ce que la palette soit amenée, par attraction, dans sa position normale. Si F est la force nécessaire pour soulever la palette, D la distance des plateaux lorsque l'équilibre est atteint et V le potentiel du plateau A, on a encore

Fig. 131.

$$V = D\sqrt{\frac{8\pi F}{s}}.$$

Cet instrument est presque suffisant pour mesurer le potentiel d'une machine électrique capable de donner des étincelles de 30 centimètres. Il n'est pas nécessaire de l'enfermer dans une cage, parce que la palette d'aluminium est si petite et l'attraction électrique si énergique, que les courants d'air ordinaires sont sans influence sensible. Il faut cependant le recouvrir d'une cloche quand on ne s'en sert pas, sans quoi les poussières se déposent sur la lame d'aluminium et troublent les résultats; avant de s'en servir, on essuie le plateau inférieur et la palette avec la main bien sèche. C'est là d'ailleurs une remarque générale : on ne doit jamais essuyer avec un linge les organes actifs d'un appareil de mesure pour les phénomènes électriques, car on s'expose à y laisser des filaments qui ont ensuite une influence très-fâcheuse.

Une autre observation utile à signaler, et qui montre combien il est nécessaire d'opérer dans des vases fermés, c'est que tous les appareils dans lesquels on emploie un disque attractif sont assez délicats, pour manifester l'influence d'un changement brusque de la pression atmosphérique, même très-faible, comme celui que l'on provoque en ouvrant ou fermant une porte.

APPAREILS DE ROTATION.

289. **Aiguilles électriques.** — Nous avons vu que Gilbert se servait déjà comme électroscope d'une tige très-légère de substance quelconque, posée sur une pointe verticale autour de laquelle elle pouvait tourner sous l'influence des actions les plus faibles.

Du Fay employait une aiguille en verre, posée aussi sur un pivot vertical, munie à l'une de ses extrémités d'une boule de cuivre, et, à l'autre extrémité, d'un contre-poids qui la maintenait horizontale. Cette boule, étant chargée d'une électricité connue, permettait de reconnaître la nature de l'électricité d'un corps, suivant qu'elle en était repoussée ou attirée.

En remplaçant la boule de Du Fay par un ballon de caoutchouc gonflé et doré à sa surface, on obtient un appareil de grandes dimensions très-léger, par lequel on peut montrer dans les cours les phénomènes d'attraction et de répulsion électrique à un grand nombre de personnes.

L'aiguille électrique d'Hauy [1] est formée aussi d'une aiguille en métal équilibrée sur un pivot, et portant à l'une de ses extrémités un petit cristal de spath d'Islande. Il suffit de presser ce cristal entre les doigts pour qu'il se charge d'électricité positive, et cette électrisation persiste longtemps, même pendant plusieurs jours, ce qui en fait un électroscope très-commode.

290. **Électromètre d'Œrstedt.** — La balance électrique de Coulomb à fil de cocon (44) est un instrument d'une extrême sensibilité, mais la torsion du fil est, en général, négligeable par rapport aux forces électriques que l'on fait intervenir.

[1] *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série t. V, p. 72.

Œrstedt (1) a fait de cette balance un électromètre, en lui donnant une force directrice plus grande à l'aide d'un petit aimant. L'instrument d'Œrstedt se compose d'une aiguille de métal *ab* (fig. 132) suspendue à un fil de cocon par l'intermédiaire d'un petit arc d'acier aimanté I ; une tige creuse en métal mastiquée dans le couvercle se termine en bas par un arc AB, en haut par un bouton P, et porte un treuil T auquel est attaché le fil. On observe l'aiguille à l'aide d'une lunette L placée sur le côté. Quand l'appareil est en repos et à l'état neutre, l'aiguille est en contact sans pression avec le conducteur. Lorsqu'on électrise

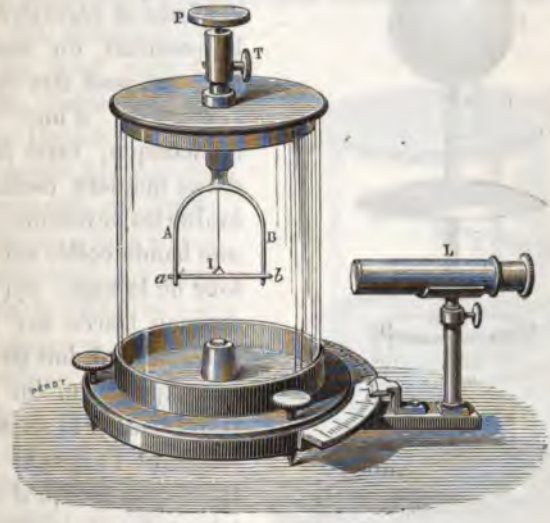


Fig. 132.

le bouton supérieur, l'aiguille s'électrise au contact du conducteur, est repoussée et se maintient à une position d'autant plus éloignée que la charge électrique est plus grande et le moment magnétique de l'aimant plus faible. On pourrait d'ailleurs graduer cet instrument par une des méthodes déjà indiquées.

291. **Électromètre de Peltier.** — Peltier a employé souvent, et en particulier pour l'étude de l'électricité atmosphérique (2), un

(1) *Pogg. Ann.*, t. LIII, p. 612.
(2) *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. LXII, p. 425.

électroscope dans lequel il utilise aussi, comme force directrice, l'action de la terre sur un aimant. La disposition de Peltier se distingue surtout par cette circonstance que l'aiguille mobile *ab*, (fig. 133) qui porte le petit aimant *cd*, repose sur une pointe de métal *i*, et reste en communication permanente avec le conducteur fixe D. On évite ainsi les causes d'erreur qui pourraient résulter des pertes d'électricité d'un conducteur mobile suspendu par un fil de cocon, et il n'est pas nécessaire de ramener l'appareil à l'état neutre quand on veut passer d'une expérience à une autre; les déviations de l'aiguille varient d'une manière continue et régulière lorsque le potentiel du conducteur fixe, qui peut être terminé à l'extérieur d'une manière quelconque, varie lui-même d'une manière continue. On évalue les déviations, soit par une bande collée sur le pourtour de la cage, soit par une division tracée sur le fond. L'instrument doit être gradué par expérience. On peut encore modifier la sensibilité en orientant l'appareil de telle façon que, lorsqu'il est à l'état neutre, l'aiguille mobile soit déjà écartée des boules E qui communiquent au conducteur fixe, ou appliquée contre ces boules avec une certaine force.

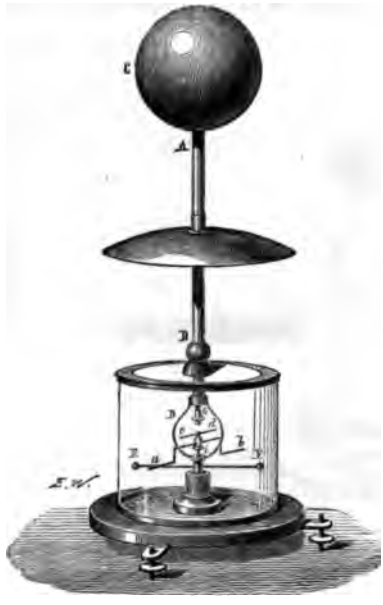


Fig. 133.

Dans la figure, l'appareil est muni d'un dôme et terminé par une boule, pour l'étude de l'électricité atmosphérique.

292. **Électromètre à sinus de M. Riess.** — M. Riess a fait de cet appareil un électromètre à sinus (1), tout-à-fait analogue à la boussole de Pouillet. Un conducteur fixe AB (fig. 134),

(1) *Pogg. Ann.* t. XCVI, p. 515. — *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XLVI, p. 502

mastiqué dans la paroi latérale d'un cylindre de verre et terminé à l'extérieur par une boule, porte une pointe de métal sur laquelle est posée une petite aiguille aimantée *ab*. Sur le couvercle du cylindre est un microscope L à réticule, à l'aide duquel on vise un trait délié tracé sur l'aiguille aimantée; ce couvercle est mobile, et la rotation qu'on lui donne est indiquée par une tige verticale I qui se termine en face de divisions tracées sur la base de l'instrument. Le cercle qui porte ces divisions est mastiqué à la cage en verre et peut tourner lui-même sur un trépied à vis calantes.

Pour se servir de l'instrument, on l'oriente de façon que l'aiguille se maintienne à une certaine distance du conducteur fixe, et l'on fait coïncider l'image du trait avec le point de croisement du réticule. Quand on électrise la boule A, l'aiguille est repoussée; on détermine l'angle α dont il faut tourner la cage, pour que l'aiguille se retrouve à la même distance du conducteur fixe : la répulsion électrique est alors équilibrée par l'action de la terre sur l'aiguille aimantée. Comme le moment de cette action est proportionnel au sinus de l'angle α, ce sinus sera aussi proportionnel au carré de la charge ou au carré du potentiel du conducteur. De même que pour les appareils précédents, la sensibilité peut être modifiée à volonté en changeant la distance à laquelle on ramène l'aiguille dans les différentes expériences.

Fig. 134.

293. **Modifications de la balance de torsion.** — La balance de torsion imaginée par Coulomb peut être considérée comme un appareil dans lequel on fait agir, sur une aiguille électrique mobile, une force antagoniste qui la maintient en équilibre à une certaine distance, malgré la répulsion d'un corps électrisé fixe.

... mètres les plus précis que l'on ait employés. ... indique l'usage d'une manière assez complète ... nous aurons à y revenir. Différents physiciens ont ap... les modifications qui n'en changent pas le ... paraissent pas, en pratique, avoir une grande ... Gauss, par exemple, remplaçait quelquefois le fil ... de verre dont l'élasticité paraît plus régu... trouvé en effet (1) que les fils de verre se cassent ... atteint la limite à partir de laquelle ils cesse... leur position primitive d'équilibre : M. Harris ... suspension bifilaire que nous avons décrite (51); ... savait mouvoir le tambour supérieur avec une vis ... commandée par une longue tige que l'observateur tenait ... observant l'aiguille mobile avec une lunette : ces ... paraissent trop rigoureux pour le degré de précision ... genre d'expériences.

... cas, la balance permet d'évaluer la répulsion ... entre deux boules électrisées, et l'on peut en déduire ... des quantités elles-mêmes en unités absolues. ... sont assez éloignées pour qu'on puisse les remplacer ... leurs centres, et si leurs charges sont m et m',

$$\frac{mm'}{d^2} = (\mathrm{T} + \alpha) \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

... sont égales et ont été électrisées par contact, les ... sont aussi égales, ce qui donne

$$m^2 = ld\,(\mathrm{T} + \alpha) \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

... quantités que renferme le second membre peuvent ... directement : les angles T et α sont donnés par ... même, le rayon l de l'aiguille se déterminera ... le couple de torsion c du fil pour un angle égal ... on fera osciller le fil avec un poids dont ... est connu.

(1) ..., p. 215.
... Bd I, p. 72.

294. Pour déterminer en valeur absolue le potentiel d'un corps ou d'une source d'électricité, il faut maintenir les deux boules en communication avec la source afin d'éviter l'influence de la déperdition, et, dans ce cas, le potentiel étant constant, l'observation de la position d'équilibre comportera une plus grande précision; on pourra alors, comme l'a fait M. Hankel, adapter à l'aiguille un miroir réflecteur dans lequel on observera avec une lunette l'image d'une règle divisée extérieure.

Cette disposition a été employée par M. Branly (1). La boule mobile était portée par une tige métallique très-mince, communiquant avec le fil de torsion, et la boule fixe par une autre tige de métal; on pouvait ainsi relier les deux boules par un fil extérieur en communication avec un corps électrisé.

Remarquons, à ce sujet, que le calcul de l'expérience est assez compliqué. Nous pouvons d'abord réduire l'action à celle des deux boules, en négligeant l'influence de la tige fixe et les forces qui s'exercent sur la tige qui constitue l'aiguille. Si la distance des boules était très-grande par rapport à leur diamètre, on pourrait considérer l'équation approchée

$$m^2 = 4lc\,(\mathrm{T} + \alpha)\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\frac{\alpha}{2}$$

comme suffisamment exacte. Le potentiel V de chacune des boules de rayon r serait alors sensiblement égal à $\frac{m}{r}$, et l'on aurait finalement

$$\mathrm{V}^2 = r^2 4lc\,(\mathrm{T} + \alpha)\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tang}\frac{\alpha}{2};$$

le second membre de cette équation renfermant des quantités que l'on peut déterminer toutes par expérience, on déterminera en unités absolues la valeur du potentiel V. Mais ce calcul approché est le plus souvent très-éloigné de la vérité et, après avoir mesuré la répulsion des deux boules, il faut, pour déterminer le potentiel, avoir recours aux formules relatives à l'action réciproque de deux sphères. Les tables calculées par M. Thomson

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale*, 2e série, t. II, p. 211.

(239, 240) résolvent le problème pour le cas de boules égales dont la distance est plus petite que leur diamètre.

295. **Balance de Dellmann.** — La balance de Coulomb avait déjà été modifiée par M. Dellmann. La partie originale de l'instrument de M. Dellmann se compose d'un conducteur GG' (fig. 135) creusé en forme de gouttière dont on a enlevé l'un des bords sur chacune des deux moitiés. L'aiguille est conductrice et portée par un fil de verre f; on l'électrise en la mettant en contact avec la rigole; puis on la soulève un peu et elle est repoussée à une certaine distance. Si, à l'aide d'une torsion convenable, on ramène l'aiguille à une même distance dans toutes les expériences, la force répulsive est proportionnelle au produit des charges de l'aiguille et du conducteur fixe, par suite, au carré de la charge totale ou bien au carré du potentiel; ce potentiel est donc proportionnel à la racine carrée de la torsion totale nécessaire pour amener l'aiguille à une distance constante. On peut d'ailleurs faire une graduation expérimentale et l'on reconnaît que, jusqu'à une certaine distance, la déviation de l'aiguille est proportionnelle à la charge.

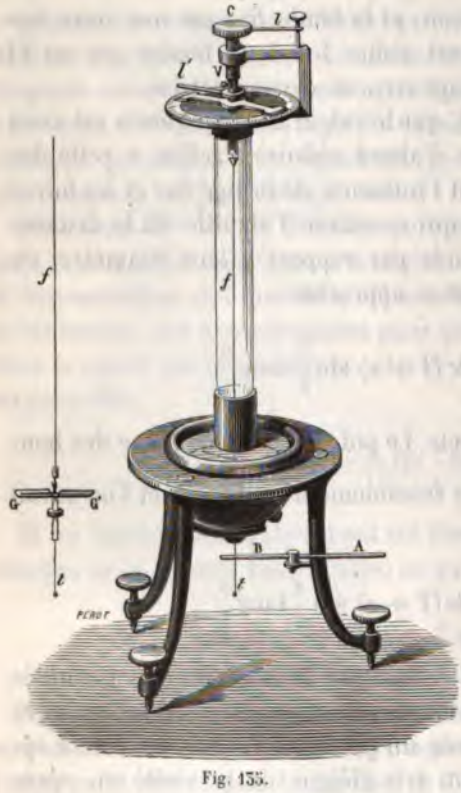


Fig. 135.

Pour obtenir des indications régulières, il faut avoir soin que l'aiguille soit posée en croix sur la rigole au moment où on la charge; dans ces conditions, le conducteur formé par l'ensemble

de l'aiguille et de la rigole a une capacité plus grande, la quantité d'électricité qu'il prend est alors plus grande et plus constante.

L'appareil décrit et employé par M. Kohlraush (1) présente des dispositions mécaniques assez compliquées. L'aiguille, placée au centre d'une cage circulaire, est suspendue à un fil de verre attaché à un tambour divisé ; au-dessous de l'aiguille est un cercle divisé sur lequel on évalue les déviations. Pour faire une expérience, on détermine d'abord le zéro du tambour supérieur, c'est-à-dire la position de l'index quand l'aiguille est exactement en contact avec la rigole sans torsion ; puis on tord le fil de 90° et, à l'aide d'un bouton extérieur, on soulève la rigole de façon que l'aiguille soit posée à cheval sur les deux échancrures. Cette rigole est d'ailleurs isolée, et, par un deuxième ressort, on la fait communiquer avec un bouton extérieur qu'on électrise. On supprime ensuite cette communication, puis on abaisse la rigole. Si le tambour est remis au zéro, on observera l'angle d'écart ; si l'on veut observer à une distance constante, il faudra donner au fil une torsion convenable.

M. Dellmann (2) a simplifié lui-même la construction de son électromètre.

Le fil de torsion est toujours en verre ; ces fils sont sans doute fragiles, mais l'élasticité est parfaite et la sensibilité peut être telle que l'aiguille, chargée par une pile de volta de 200 éléments, éprouve une déviation de 80°. Ce fil est attaché à une pièce métallique qu'un levier *l* (fig. 155) mobile entre deux butoirs fait tourner exactement de 90°, en produisant par un mouvement en hélice un petit abaissement de l'aiguille. Cette aiguille est formée simplement par un fil d'argent tordu en boucle en son milieu. La rigole est fixe et communique d'une manière permanente avec un bouton extérieur *t*. Enfin la division placée au-dessous de l'aiguille est tracée sur un miroir, de sorte qu'avec une loupe on aperçoit en même temps l'aiguille et son image ; on peut ainsi apprécier les déviations avec une exactitude de $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{12}$ de degré, sans effet de parallaxe.

Pour faire une expérience, il faut d'abord tourner le levier supé-

(1) *Pogg. Annal.*, t. LXXII, p. 353.
(2) *Pogg. Annal.*, t. LXXXVI, p. 524.

rieur *l*, de manière à poser l'aiguille en croix sur la gouttière, électriser l'appareil par le bouton *t*, relever l'aiguille par le levier *l* qu'on ramène dans sa position primitive; on observe alors la déviation ou bien, à l'aide du levier *l'*, on tord le fil de manière à ramener l'aiguille à distance constante. La déperdition est plus rapide que lorsqu'on peut supprimer la communication du bouton avec la gouttière, mais elle est encore très-faible et il est facile de faire la correction qui lui correspond.

296. **Électromètre de M. Thomson.** — M. Thomson a apporté des modifications importantes dans la construction des électromètres de torsion. Pour comprendre l'idée générale qui a guidé M. Thomson, considérons deux conducteurs fixes A et B, symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan OO' (fig. 136), et maintenus à des potentiels différents V_1 et V_2; puis un troisième conducteur C, symétrique par rapport au même plan, mobile autour d'une droite située dans ce plan, et porté à un potentiel V. Ce conducteur mobile subira des forces inégales de la part des deux conducteurs fixes; mais nous supposerons que par une force étrangère, comme la torsion d'un fil, on le maintient dans la position de symétrie.

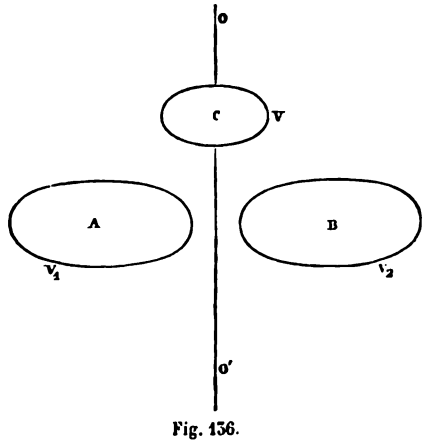


Fig. 136.

Les distances du conducteur mobile aux conducteurs fixes restant constantes, il s'agit d'évaluer la manière dont varient les forces électriques en fonction des potentiels V, V_1 et V_2.

297. Lorsque deux conducteurs A et C sont en présence, l'un communiquant avec le sol et l'autre étant au potentiel V, nous avons vu, bien des fois déjà, qu'il s'exerce entre eux une attraction proportionnelle au carré du potentiel; on peut exprimer cette force par hV^2, le coefficient *h* dépendant de la forme des corps, de leurs dimensions et de la distance qui les sépare.

Supposons maintenant que ces deux corps soient, le premier au potentiel V_1, et le second au potentiel V. En vertu du principe de la superposition des états d'équilibre, nous pouvons décomposer le problème de la manière suivante : Si le conducteur A est au potentiel V_1, le conducteur C étant en communication avec le sol, il y aura sur le premier une quantité d'électricité $+ a$, sur le second une charge $- a'$ d'électricité contraire, et les deux corps s'attireront avec une force égale à hV_1^2. Si le conducteur C est au potentiel V et l'autre non isolé, il y aura de même sur le premier une charge $+ c$, sur le second une charge $- c'$, et l'attraction des deux corps sera kV^2, les deux coefficients h et k n'étant pas égaux en général. Ces deux états d'équilibre superposés donneront un nouvel état d'équilibre correspondant au potentiel V_1 sur le premier corps A, et au potentiel V sur C, c'est-à-dire à l'équilibre proposé. L'action des deux corps comprendra d'abord les deux forces attractives hV_1^2 et kV^2, plus la répulsion des couches a et c et celle des couches c' et a'. La première de ces répulsions est proportionnelle séparément aux deux masses a et c et, par suite, aux potentiels V_1 et V, ou à leur produit VV_1 ; la seconde est aussi proportionnelle à c' et a', ou encore au produit VV_1. La somme de ces deux forces sera lVV_1, l étant un nouveau coefficient. Les moments de toutes ces forces, par rapport à un axe quelconque, auront des expressions de même forme, de sorte qu'en définitive, si le conducteur C est mobile autour d'un axe, le moment de la force exercée sur lui par le conducteur A pourra être représenté par la somme des trois termes

$$hV_1^2 + kV^2 - lVV_1.$$

L'action est toujours attractive si les potentiels V et V_1 sont de signes contraires ; si ces potentiels sont de même signe, la résultante pourra être, suivant les cas, attractive ou répulsive.

298. Considérons enfin les trois corps proposés A, B et C, dont les potentiels sont V_1, V_2 et V. Nous décomposerons l'état électrique en trois autres. Dans le premier état, le conducteur C est au potentiel V, et les deux autres non isolés, ce qui correspond à une charge $+ c$ du premier, et à des charges égales à $- c'$ sur chacun des deux autres, à cause de la symétrie ; on aura donc,

pour ce premier cas d'équilibre,

Conducteurs.	A	C	B
Potentiels.	o	V	o
Charges.	$-c'$	$+c$	$-c'$

Pour le deuxième cas, le conducteur A sera porté au potentiel V_1, et les deux autres en communication avec le sol, ce qui donnera de même

Conducteurs.	A	C	B
Potentiels.	V_1	o	o
Charges.	$+a$	$-a'$	$-a''$

Enfin, dans le troisième cas d'équilibre, le conducteur B sera au potentiel V_2, et l'on aura encore

Conducteurs.	A	C	B
Potentiels.	o	o	V_2
Charges.	$-b''$	$-b'$	$+b$.

La superposition de ces trois états d'équilibre reproduira bien l'équilibre proposé ; il reste à évaluer les forces exercées sur le conducteur intermédiaire C.

Remarquons d'abord que les couches électriques $-c'$ n'interviennent pas, parce que les forces qu'elles exercent sur C sont symétriques et donnent une résultante dont le moment est nul; il suffit donc d'évaluer les actions des couches $+a$ et $-a''$, $-b''$ et $+b$ sur les trois couches c, $-a'$ et $-b'$. Les couches a et $-a''$ exercent sur la couche c deux actions, l'une répulsive, l'autre attractive, qui poussent toutes deux le corps mobile vers le conducteur B, et sont proportionnelles aux potentiels V_1 et V : le moment résultant de ces forces, que nous supposerons positif, peut être représenté par lVV_1. De même, les couches $-b''$ et b, agissant sur c, donnent un moment de signe contraire $-lVV_2$. L'action des couches $+a$ et $-a''$ sur $-a'$ donne un terme proportionnel au carré du potentiel, dont le moment hV_1^2 est négatif ; l'action de $-b''$ et $+b$ sur $-b'$ aura de même un moment hV_2^2 positif.

Il n'y a plus d'autres forces à faire intervenir, parce que, d'une part, les actions de $+a$ et $-a''$ sur $-b'$ et, d'autre part,

celles de $-b''$ et $+b$ sur $-a'$ ont des moments égaux et de signes contraires.

En définitive, le moment résultant K de toutes les actions exercées sur le conducteur mobile est

$$K = lVV_1 - lVV_2 - hV_1^2 + hV_2^2,$$

ou

$$K = lV(V_1 - V_2) + h(V_2^2 - V_1^2).$$

Il peut se présenter plusieurs cas :

1° Si les potentiels V_1 et V_2 des corps attractifs sont égaux et de signes contraires, la formule se réduit à

$$K = lV(V_1 - V_2);$$

l'action est donc proportionnelle au potentiel du conducteur mobile et à la différence des potentiels des conducteurs fixes.

2° Si, le potentiel V étant très-faible, les valeurs de V_1 et V_2 ne sont pas égales et de signes contraires, le second terme devient prédominant, ce qui serait une condition expérimentale désavantageuse.

3° Si le potentiel V est très-grand par rapport aux potentiels V_1 et V_2, la formule se réduit encore au premier terme, car on peut écrire

$$K = lV(V_1 - V_2)\left[1 - \frac{h}{l}\frac{(V_1 + V_2)}{V}\right],$$

et le facteur $\frac{h}{l}$ n'est évidemment pas assez grand pour que la parenthèse diffère sensiblement de l'unité.

Dans le premier cas, on pourra déterminer un potentiel très-faible V en fonction d'une différence connue $V_1 - V_2$ de deux autres potentiels égaux en valeurs absolues ; dans le troisième, on déterminera la différence des potentiels $V_1 - V_2$ de deux conducteurs en fonction d'un potentiel constant V. Dans ces deux cas, la force est directement proportionnelle, et par un facteur très-grand, à la quantité que l'on veut déterminer ; c'est là le principe des appareils de M. Thomson.

299. On peut remarquer que le premier cas est déjà presque réalisé dans l'électroscope de Behrens (269), et que les conditions

seraient exactement les mêmes si l'on pouvait, par une force antagoniste, ramener la feuille d'or dans la verticale.

M. Hankel (1) a employé une modification analogue de la balance de Coulomb. Quatre boules de métal, portées par des pieds en verre, sont disposées dans la cage aux sommets d'un rectangle; deux boules, situées aux extrémités d'une diagonale, sont réunies à l'un des pôles d'une pile de Volta, et les deux autres à l'autre pôle. L'aiguille, qui est métallique, est soutenue par un fil d'acier; elle porte à ses extrémités des boules conductrices, et peut se mouvoir dans le plan des boules fixes. Si cette aiguille est électrisée d'une manière quelconque, on voit qu'elle sera déviée d'un côté ou de l'autre, comme la feuille d'or de l'électroscope de Behrens; M. Hankel se bornait à observer les déviations, mais, pour être exactement dans les conditions du calcul qui précède, il serait nécessaire de ramener chaque fois l'aiguille mobile dans un plan de symétrie par rapport aux boules fixes.

300. M. Thomson a construit, d'après ce principe, un assez grand nombre d'appareils qu'il a modifiés successivement. La plus importante des modifications consiste dans le moyen qu'il emploie pour remplacer, par une simple lecture de déviation, l'expérience délicate qu'exigerait la nécessité de ramener chaque fois le conducteur mobile à sa position primitive. Pour cela, l'aiguille mobile a une forme telle que les petits déplacements qu'elle éprouvera ne puissent modifier l'action que les conducteurs fixes exerceront sur elle. Ces conducteurs sont formés de quatre quadrants A, A′, B, B′ (fig. 137), réunis deux à deux en croix par des fils de métal, et l'aiguille a la forme d'un 8, dont le grand axe est parallèle à la ligne de séparation de deux quadrants voisins. Les seules parties de cette aiguille sur lesquelles l'action des conducteurs ait une composante horizontale sensible, sont

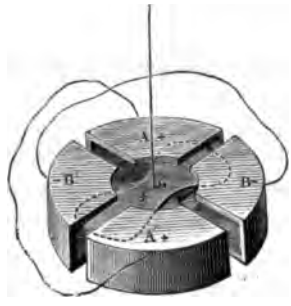


Fig. 137.

(1) *Pogg. Annal.*, t. CIII, p. 233.

celles qui sont les plus rapprochées de la ligne de séparation des quadrants, et cette action ne sera pas modifiée quand l'aiguille passera de la position primitive à une position très-voisine. L'équilibre aura lieu quand le couple de torsion, c'est-à-dire la déviation elle-même, sera proportionnel au produit $V(V_1 - V_2)$ du potentiel de l'aiguille par la différence des potentiels de deux systèmes de quadrants.

La proportionnalité serait altérée si les variations de température, ou toute autre circonstance, faisaient changer la distance de l'aiguille aux quadrants. Pour éviter cette cause d'erreur, M. Thomson place l'aiguille dans un *champ électrique constant*, c'est-à-dire dans un espace où la force électrique est à peu près indépendante de la position de l'aiguille. Les conducteurs sont, non pas des secteurs de cercle, mais des portions d'une boîte cylindrique, dans l'intérieur de laquelle est placée l'aiguille, comme on le voit sur la figure; l'aiguille se rapproche de l'une des bases quand elle s'éloigne de l'autre, et l'action est sensiblement constante. Cette disposition présente en outre l'avantage de soustraire l'aiguille d'une manière complète à l'influence des corps extérieurs.

301. Pour produire la force de torsion, on suspend l'aiguille soit à un fil de métal, soit à un fil de cocon muni d'un petit aimant dont on peut faire varier à volonté la force directrice par l'action d'un aimant fixe extérieur, soit par deux fils de cocon voisins dont on peut rapprocher ou éloigner les points de suspension. C'est ce dernier procédé auquel M. Thomson s'est arrêté.

Comme les déviations sont toujours très-faibles, l'aiguille porte un petit miroir dans lequel on observe la réflexion d'une échelle graduée. Il y a lieu de faire quelques remarques sur l'emploi de cette méthode d'observation, imaginée par M. Poggendorff et vulgarisée depuis les expériences de Gauss et Weber.

Habituellement le miroir est plan et, avec une lunette extérieure on y vise l'image d'une échelle placée auprès de la lunette (fig. 138); le nombre des divisions de l'échelle qui passent sur le réticule de la lunette est proportionnel à la tangente du double de la déviation du miroir, ou sensiblement à la déviation elle-même. Les images que l'on observe dans ce cas sont souvent défectueuses, si le miroir n'a pas une grande étendue;

quand on veut éviter de surcharger l'aiguille, il est nécessaire que le miroir soit formé par une lame de verre très-mince et de petite étendue. Dans ces conditions, il est à peu près impossible d'obtenir une surface convenablement plane, et il arrive presque toujours que les images sont déformées; on ne peut pas mettre en même temps au point, par exemple, les divisions verticales de l'échelle et les traits horizontaux ou les chiffres de graduation, ce qui nuit beaucoup à la précision des mesures. M. Thomson emploie de préférence des miroirs concaves dont la construction est plus facile.

Fig. 138.

Une échelle divisée est placée à une distance du miroir égale à son rayon de courbure. A côté de cette échelle est une fente verticale (fig. 139) éclairée par une lampe, et l'on reçoit sur l'échelle divisée l'image de la fente produite par le miroir concave que porte l'aiguille; les images sont plus nettes parce qu'on est ainsi placé dans le cas ou les aberrations sont le plus faibles. C'est d'ailleurs par un procédé analogue que se font les observations pour les télégraphes transatlantiques.

Fig. 139.

M. Angot (1) a employé de même une disposition avantageuse. Le rayon de courbure du miroir est très-petit, d'un ou deux décimètres; on place, dans le voisinage du centre de courbure, une échelle divisée en cinquièmes

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale*, 2e série, t. III, p. 261.

ou en dixièmes de millimètres, éclairée par une lampe directement ou par transparence suivant qu'elle est tracée sur métal ou sur verre; on fait en sorte que l'image se produise au-dessus de l'échelle elle-même et on l'observe avec un microscope. Les traits de l'image sont alors très-purs et les déviations se mesurent avec une grande précision.

302. Il ne reste plus que quelques mots à ajouter pour décrire complétement l'électromètre de M. Thomson (fig. 140). Cet appareil comprend : une *jarre électrique*, l'*aiguille mobile* et les *quadrants attractifs*, un *reproducteur*, une *jauge* et un *inducteur*.

Fig. 140.

La jarre est formée d'un grand vase en verre renfermant une couche d'acide sulfurique qui constitue l'une des armatures; l'autre armature est formée par des lames d'étain qui couvrent la surface extérieure et laissent entre elles des fenêtres par lesquelles on peut voir l'intérieur de la bouteille. L'appareil est porté par une monture en métal qui communique avec l'armature extérieure. Cette bouteille est fermée par une plaque de caoutchouc durci sur laquelle sont montés tous les autres organes. Un fil de platine qui plonge dans l'acide sulfurique communique avec une tige de métal extérieure par laquelle on peut électriser la jarre; un bouton permet d'établir ou de supprimer cette communication. Quand le verre a été convenablement choisi, l'air intérieur est tellement désséché par l'acide sulfurique que l'isolement est presque absolu et qu'une pareille jarre ne perd pas en 24 heures le centième de sa charge.

L'aiguille est formée d'une lame d'aluminium de quatre cen-

timètres carrés de surface environ ne pesant pas plus de 70 milligrammes; elle est attachée à une tige qui porte à la partie supérieure un petit miroir concave de 8 millimètres de diamètre pesant 22 milligrammes. Cette tige se termine en haut par un petit T où sont attachés les fils de cocon, et en bas par un fil de platine tendu par un petit poids et plongeant dans l'acide sulfurique; c'est par ce fil que l'aiguille est portée au potentiel de l'armature intérieure de la jarre.

Les quadrants, réunis en croix deux à deux, sont suspendus au couvercle par des tiges de verre. Trois d'entre eux sont fixes et le quatrième est mobile à l'aide d'une vis micrométrique. ce qui permet d'ouvrir la boîte pour enlever l'aiguille et de régler l'appareil. Deux conducteurs extérieurs appelés *électrodes principales* (*chief electrodes*) peuvent, à l'aide de ressorts convenables, communiquer séparément avec les deux systèmes de quadrants.

Enfin l'acide sulfurique communique avec le plateau attractif d'une jauge montée aussi sur le couvercle; un reproducteur permet de maintenir constant le potentiel de l'armature intérieure de la jarre et, par suite, de l'aiguille mobile.

303. On comprend maintenant sans difficulté l'usage de cet électromètre. On charge la jarre par l'électrode qui convient, puis, par le moyen du reproducteur, on augmente ou diminue la charge, jusqu'à ce que le cheveu de la jauge se trouve exactement entre les repères, et, les deux électrodes principales communiquant entre elles, on note la position de l'image réfléchie. On met ensuite en communication ces deux électrodes avec les deux corps dont on veut évaluer la différence de potentiel et on observe la position nouvelle de l'image : le déplacement est proportionnel à la différence des potentiels.

Pour donner une idée de la sensibilité de cet appareil, nous prendrons des nombres dans les mémoires de M. Thomson. Avec un instrument dont l'aiguille était armée d'un aimant et portée par un seul fil de cocon, les deux pôles d'un élément Daniell produisaient un déplacement de l'image de 100 divisions de l'échelle : chaque division était de $\frac{1}{40}$ de pouce ($0^{mm},62$) et l'on pouvait en apprécier le sixième, ce qui correspondait à un angle de 20″, la règle étant éloignée d'environ 1 mètre. L'appareil indiquait donc le $\frac{1}{600}$ de la différence de potentiel des deux pôles

d'un élément Daniell. Avec la suspension bifilaire, le déplacement n'était plus que de 60 divisions, la sensibilité était donc encore le $\frac{1}{400}$ d'un élément Daniell.

304. Dans cet état, l'électromètre serait trop délicat pour la plupart des recherches, mais on peut diminuer beaucoup la sensibilité, même sans modifier la charge électrique de la jarre. Déjà, en isolant deux des quadrants, les déviations deviennent 10 ou 13 fois plus faibles, mais on peut aller plus loin, à l'aide d'une plaque de métal appelée *inducteur*, placée au-dessus de l'un des quadrants. Quand les quatre quadrants sont réunis deux à deux, l'inducteur n'a pas d'influence, on peut l'isoler ou le relier soit à la cage, soit au quadrant voisin, sans modifier la déviation d'une manière appréciable; il n'en est pas de même quand les quadrants sont tous ou en partie isolés. Du reste, afin de ne pas compliquer la description, nous allons représenter par un tableau les différentes dispositions que l'on peut employer pour obtenir des sensibilités décroisantes.

Soient X et Y les deux corps dont on veut déterminer la différence des potentiels; l'un d'eux Y sera mis en communication permanente avec la cage, celle-ci étant ou non maintenue isolée. Soient A et B les deux électrodes principales, I l'inducteur que nous supposerons placé au-dessus de l'un des quadrants de l'électrode B. Quand l'une des lettres A ou B dans le tableau est entourée d'une parenthèse, cela signifie que cette électrode est isolée ainsi que les quadrants correspondants; XA signifie que le corps X est en communication avec l'électrode A; Y, que ce corps communiqne seulement avec la cage, etc.

1° Disposition ordinaire :

$$\begin{cases} XA \\ YB \end{cases} \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{cases} XB \\ YA \end{cases}$$

2° Suppression de l'une des paires du quadrant :

$$(B)\begin{cases} XA \\ Y \end{cases} \qquad\qquad (A)\begin{cases} XB \\ Y \end{cases}$$

3e Emploi de l'inducteur :

$$(B)\begin{cases} XA \\ YI \end{cases} \qquad\qquad (A)\begin{cases} XB \\ YI \end{cases}$$

4°

$$(B)\begin{cases} XAI \\ Y \end{cases} \qquad (A)\begin{cases} XBI \\ Y \end{cases}$$

5°

$$(B)\begin{cases} XI \\ YA \end{cases} \qquad (A)\begin{cases} XI \\ YB \end{cases}$$

6°

$$(A,B)\begin{cases} XI \\ Y \end{cases}$$

305. La plus grande difficulté que l'on rencontre dans la construction de cet électromètre est le choix du verre. M. Thomson emploie pour cela des bouteilles en flint glass fabriquées à Glasgow. Il a essayé sans succès beaucoup d'autres espèces de verre : les verres colorés en vert et la plupart des verres blancs ne donnent pas de bons résultats, la charge de la jarre varie trop rapidement. Le reproducteur est aussi un mécanisme délicat qu'on ne parvient pas facilement à construire d'une manière convenable. Toutes ces difficultés nuiront sans doute longtemps à l'emploi et surtout à la vulgarisation de ces appareils, au moins sous la forme que nous venons de décrire.

306. **Modifications de l'électromètre de M. Thomson.** — Plusieurs physiciens ont emprunté à M. Thomson l'idée des secteurs circulaires, mais on a recours le plus souvent, pour obtenir un potentiel constant, à une pile formée d'un nombre d'éléments plus ou moins grand. Ainsi M. Branly (1) a placé cet appareil dans une cage analogue à celle de la balance de Coulomb (fig. 141), l'aiguille étant suspendue par un fil métallique, et munie d'un miroir dans lequel on vise avec une lunette l'image d'une échelle divisée. On peut n'employer que quatre secteurs plans, situés au-dessus ou au-dessous de l'aiguille, et réunis entre eux, deux à deux, par la partie supérieure des tiges qui les supportent; mais il vaut mieux prendre huit secteurs, dans l'intérieur desquels l'aiguille est placée. Le fil de torsion est commandé par un bouton supérieur, qui permet d'amener l'aiguille dans la position de symétrie.

La pile la plus commode à employer est celle de Volta et,

(1) *Annales scientifiques de l'Ecole Normale*, 2e série, T. II, p. 209.

comme les dimensions des éléments n'ont aucune importance, on peut la former avec des tubes de verre ou de petits pots en terre parfaitement isolés les uns des autres, en les posant sur un gâteau de soufre ou de gomme laque, ou mieux encore en noyant toutes les bases dans une couche de paraffine. On met dans ces vases de l'eau ordinaire et on les réunit successivement par une double lame de zinc et de cuivre soudés. Comme l'eau s'évapore lentement, on peut verser une couche d'huile ou de paraffine à la surface du liquide, dans chacun des pots : une pile ainsi montée n'a que des dimensions très-restreintes et peut servir presque indéfiniment.

Fig. 141.

307. Pour faire une expérience, on mettra, par exemple, l'aiguille en communication avec l'un des pôles de la pile, l'autre pôle étant relié avec le sol, et les deux systèmes de secteurs séparément en communication avec les deux corps dont on veut déterminer la différence des potentiels ; ou bien ces deux groupes de secteurs avec les deux pôles de la pile, et l'aiguille avec le corps que l'on veut étudier. L'expérience exige quelques précautions. Il faut s'assurer que l'aiguille est symétrique par rapport aux secteurs quand le fil est sans torsion, ou plutôt que la position d'équilibre ne change pas lorsque, les deux systèmes de secteurs étant reliés entre eux et avec le

sol, on porte l'aiguille à un potentiel quelconque. Si l'on observe alors un petit déplacement, il faut l'annuler par tâtonnements, soit en tournant un peu le fil par le bouton supérieur, soit en élevant ou abaissant l'un des secteurs.

Une autre cause d'erreur est la persistance des oscillations, due principalement à la forme même de l'aiguille, dont le moment d'inertie est assez grand, et à la longueur du fil de suspension. Ces oscillations sont de deux sortes : les unes horizontales, provenant de la torsion du fil qui ne s'arrête pas à sa position d'équilibre, les autres verticales, qui se produisent toutes les fois qu'un choc ou une trépidation vient ébranler l'appareil. On les amortit très-rapidement, en fixant verticalement à l'aiguille, dans le prolongement de l'axe, une petite tige de verre portant une lame de platine qui plonge dans de l'acide sulfurique. La présence de cette palette ne diminue en rien la précision des mesures, car elle ne modifie pas la position d'équilibre; il faut avoir soin seulement qu'elle soit complétement immergée.

Enfin, il est nécessaire d'entourer l'électromètre d'écrans conducteurs communiquant avec le sol, pour le soustraire à l'action des corps extérieurs. Le moyen le plus simple est de couvrir les parois de la cage, de préférence sur leur face interne, de bandes d'étain laissant entre elles des intervalles qui permettent les observations.

Les expériences de M. Branly et de M. Angot (1) ont démontré que, lorsque l'aiguille est maintenue à un potentiel constant, la déviation est proportionnelle à la différence des potentiels des deux systèmes de secteurs, au moins jusqu'à 3°, quantité dont il est facile d'apprécier la millième partie. Quant à la sensibilité, elle dépend des dimensions du fil, de la distance de l'aiguille aux secteurs et du nombre des éléments de la pile; on peut donc la modifier à volonté, et il n'est pas difficile d'apprécier une différence de potentiel égale au $\frac{1}{100}$ de celle d'un élément Daniell.

308. M. Ed. Becquerel a employé une disposition un peu différente. Les secteurs sont remplacés par quatre lames verticales disposées comme les quatre boules de M. Hankel, et l'aiguille, sus-

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale*, 2e série, T. III, p. 263.

pendue aussi à un fil de métal, est une tige terminée à chaque extrémité par un disque vertical. L'aiguille communique, par un fil de platine plongeant dans un godet à acide sulfurique, avec l'un des pôles d'une pile, et les deux systèmes de lames avec les corps à étudier. Cette disposition offre un intérêt particulier, parce qu'il est facile de la transformer en un électromètre absolu ; il suffit, par exemple, de terminer l'aiguille par deux plaques rectangulaires, et de l'entourer par un plateau de garde convenablement découpé, dans le plan duquel elle se trouvera exactement pour la position d'équilibre.

Considérons un des côtés de l'aiguille : soit V son potentiel, V_1 et V_2 les potentiels des lames latérales A et B, situées de part et d'autre à la même distance D. L'attraction sur l'unité de surface sera, d'un côté $\frac{(V-V_1)^2}{8\pi D^2}$, et de l'autre $\frac{(V-V_2)^2}{8\pi D^2}$. La résultante F sera égale à la différence de ces deux actions

$$F=\frac{1}{8\pi D^2}[(V-V_1)^2-(V-V_2)^2]=\frac{V_2-V_1}{8\pi D^2}[2V-(V_1+V_2)].$$

Soit b la hauteur, a la largeur des rectangles qui terminent l'aiguille et $2r$ leur distance. L'action exercée sur une tranche verticale de largeur dy, située à une distance y de l'axe, sera $Fbdy$, et le moment de cette force par rapport à l'axe $Fbydy$. Le moment résultant des actions exercées sur le rectangle tout entier est donc

$$\int_r^{r+a} Fbydy=\frac{Fb[(r+a)^2-r^2]}{2}=Fab\left(r+\frac{a}{2}\right).$$

Ce moment est le même que si tous les éléments de la surface étaient placés au milieu du rectangle ; cette propriété serait vraie aussi pour un disque circulaire et pour toute surface symétrique par rapport à une verticale. Une force égale agissant sur l'autre extrémité de l'aiguille, le moment de l'action électrique totale est donc, en désignant par s la surface de chaque rectangle et d la distance de leurs centres,

$$Fab(2r+a)=\frac{V_2-V_1}{8\pi D^2}[2V-(V_1+V_2)]\,sd.$$

On pourrait tenir compte de la tige sans difficulté, et si l'aiguille était formée par une seule lame rectangulaire, il suffirait de faire dans cette expression $r=0$. On peut maintenant déterminer la torsion T du fil nécessaire pour équilibrer cette action électrique ; on aura donc, en appelant c le couple de torsion du fil pour un angle égal à l'unité,

$$cT=\frac{V_2-V_1}{8\pi l^2}\left[2V-(V_1+V_2)\right]sd,$$

expression dans laquelle toutes les quantités autres que les potentiels peuvent être déterminées directement.

On voit aisément le parti que l'on peut tirer de cet appareil.

Si l'aiguille et l'un des conducteurs sont en communication avec le sol, on fera dans la formule $V=V_2=0$, et il restera

$$cT=\frac{V_1^2}{8\pi l^2}sd,$$

équation qui donne le potentiel V_1 en nombres absolus.

Si les potentiels V_1 et V_2 sont égaux et de signes contraires, la torsion T′ sera donnée par l'équation

$$cT'=\frac{VV_1}{2\pi l^2}sd.$$

Supposons qu'après avoir réalisé cette expérience, où les deux systèmes de plateaux sont en communication avec les deux pôles d'une pile, on mette l'un d'eux en communication avec le sol, ainsi que le pôle correspondant de la pile, la valeur de V_1 sera alors doublée et V_2 sera nul. En désignant par T″ la nouvelle torsion, on aura alors, en remplaçant V_1 par $2V_1$, et V_2 par 0,

$$cT''=\left[-\frac{VV_1}{2\pi l^2}+\frac{V_1^2}{2\pi l^2}\right]sd;$$

d'où l'on déduit

$$c(T'+T'')=\frac{V_1^2}{2\pi l^2}sd,$$

équation qui donne encore, en valeurs absolues, le potentiel V_1.

Il en résulte, comme vérification,

$$\frac{T' + T''}{2} = T.$$

309. **Méthodes d'oscillations.** — On peut enfin, dans certains cas, avoir recours à la méthode des oscillations employée par Coulomb. Si l'aiguille mobile, au lieu d'être isolante et suspendue à un fil de cocon, est conductrice et attachée à un fil de métal communiquant avec le sol, et si le corps électrisé que l'on fait agir sur elle est à distance constante, le nombre des oscillations effectuées en un temps donné sera proportionnel à la racine carrée de la force électrique, c'est-à-dire au potentiel du corps extérieur, ce qui fournit, dans certains cas, un moyen commode de comparer des potentiels différents.

Cette expérience permet aussi d'effectuer des mesures absolues. Par exemple, si l'aiguille est terminée par une boule et si le corps influent est aussi une sphère de même diamètre, on peut calculer l'action des deux sphères en fonction du potentiel et déterminer la durée des oscillations. Malheureusement les tables de M. Thomson (239) ne s'étendent qu'au cas où la distance des sphères est plus petite que le diamètre de l'une d'elles, condition qui n'est pas favorable pour obtenir l'isochronisme des oscillations ni pour les expériences à potentiels très-élevés; il faudrait en outre connaître le point de la boule mobile où est appliquée la résultante des forces électriques, c'est là un élément que M. Thomson n'a pas calculé.

310. En l'absence de formules générales relatives à l'action des sphères, on peut choisir des dispositions expérimentales qui permettent des calculs plus simples.

Pour cela l'aiguille, formée d'une tige de métal, est terminée à l'une de ses extrémités par une boule de liége *s* (fig. 142) couverte d'une feuille d'étain, et suspendue à un fil de métal qui communique avec le sol.

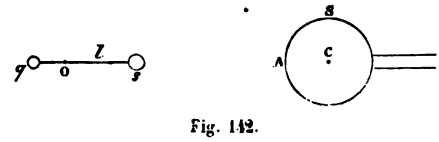


Fig. 142.

A une certaine distance on dispose une sphère S d'un diamètre beaucoup plus grand, laquelle est portée à un potentiel V. Soit R

et r les rayons des deux sphères. M et — m leurs charges électriques et D la distance des centres. Si le rayon de la petite boule est petit par rapport au rayon de la grande et à la distance des deux surfaces, la distribution de l'électricité sur la sphère influente sera sensiblement homogène.

La boule *s* communiquant avec le sol, son potentiel est nul et l'on a pour le centre, au moins d'une manière approchée,

$$\frac{-m}{r}-\frac{M}{D}=0, \quad \text{d'où} \quad m=M\frac{r}{D};$$

on peut écrire aussi, pour le centre de la sphère S,

$$V=\frac{M}{R}-\frac{m}{D}=\frac{M}{R}\left(1-\frac{Rr}{D^2}\right).$$

La force électrique est sensiblement égale au produit des masses divisé par le carré de la distance des centres, ce qui donne

$$F=\frac{Mm}{D^2}=\frac{1}{D^2}\left(\frac{VR}{1-\frac{Rr}{D^2}}\right)^2\frac{r}{D}=V^2\frac{R^2r}{D^5}\frac{1}{\left(1-\frac{Rr}{D^2}\right)^2}.$$

Le point d'application de cette force est le centre de gravité des images électriques produites dans la boule *s* par les différentes masses de la sphère S, ou sensiblement l'image électrique du centre C ; la distance de ce point d'application à l'axe de rotation diffère peu de la distance *l* de cet axe au centre de la boule mobile. Appelons enfin I le moment d'inertie de l'aiguille, *c* le couple de torsion du fil pour un angle égal à l'unité et N le nombre d'oscillations pendant l'unité de temps, on aura

$$N^2=\frac{Fl+c}{\pi^2 I}.$$

Si le nombre des oscillations est égal à *n* quand l'appareil est à l'état neutre, on a aussi

$$n^2=\frac{c}{\pi^2 I},$$

d'où l'on déduit

$$N^2 - n^2 = \frac{1}{\pi^2 I} Fl = \frac{l}{\pi^2 I} V^2 \frac{R^2 r}{D^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{Rr}{D^2}\right)^2},$$

expression que l'on peut même réduire à

$$N^2 - n^2 = \frac{l}{\pi^2 I} V^2 \frac{R^2 r}{D^3}.$$

On déterminera le moment d'inertie I par les méthodes ordinaires.

J'ai trouvé très-commode, par exemple, de suspendre à l'aiguille un long fil vertical métallique terminé par un petit plateau sur lequel on pose des barres de métal horizontales, dont le moment d'inertie est facile à calculer. Cette disposition a l'avantage d'empêcher que l'aiguille n'oscille dans un plan vertical, et ne se rapproche de la sphère extérieure par suite de l'attraction électrique. D'autre part, le couple de torsion du fil est souvent trop faible et donne des oscillations trop lentes pour que la détermination du moment d'inertie se fasse avec exactitude; on y supplée en donnant à l'appareil une force directrice plus grande à l'aide d'un aimant.

On voit que toutes les quantités que renferme la formule peuvent être déterminées par expérience, ce qui donnera la valeur de V en unités absolues.

Dans l'appareil qui m'a servi, on avait, par exemple,

$$R = 115^{mm}$$
$$r = 10,5$$
$$l = 174,$$

et la distance D a varié de 180 à 240 millimètres. Dans ce cas, le terme $\frac{Rr}{D^2}$ n'atteignait pas 4 centièmes, et, comme il s'agissait d'expériences sur l'étincelle électrique, lesquelles ne comportent pas une grande précision, les erreurs de cet ordre étaient entièrement négligeables.

311. On pourrait faire le calcul un peu plus exactement et, en tout cas, indiquer les limites d'erreur entre lesquelles est

comme le calcul approche. Ainsi, le potentiel de la masse M au centre de la petite boule est plus grand que si la couche électrique était homogène, mais plus faible que si on la plaçait tout entière au point A, ce qui permet d'écrire les inégalités

$$\frac{M}{D-R} > \frac{m}{r} > \frac{M}{D};$$

on aurait de même

$$\frac{M}{R} - \frac{m}{D-r} > V > \frac{M}{R} - \frac{m}{D},$$

$$\frac{Mm}{(D-R-r)^2} > F > \frac{Mm}{D^2}.$$

Ces inégalités donnent une idée du maximum d'erreur que l'on commet.

Les formules établies par Poisson (199) pour le cas où la distance de deux sphères est très-grande par rapport à l'un des rayons peuvent d'ailleurs être utilisés dans le cas actuel. On aurait alors, pour déterminer les masses M et m, les équations

$$V = \frac{M}{R} - \frac{m}{D},$$

$$0 = -\frac{c}{r} - \frac{M}{D} - \frac{R^3}{D^2(D^2-R^2)}m.$$

En considérant la masse m comme concentrée sur l'image du centre C par rapport à la petite sphère, à une distance x du centre de cette sphère, on aurait

$$Dx = r^2,$$

$$F = \frac{Mm}{(D-x)^2},$$

et le bras du levier de la force F qui fait tourner l'aiguille autour du centre O serait égal à $l + x$, ce qui donnerait, pour le nombre des oscillations,

$$N^2 = \frac{F(l+x)+c}{\pi^2 I}.$$

Les résultats ainsi calculés pourraient être plus exacts, si l'expérience comportait elle-même une précision suffisante.

ÉLECTROMÈTRES A DÉCHARGES.

312. L'idée de mesurer la quantité d'électricité que possède un corps, soit par l'intensité de l'étincelle que l'on obtient en le déchargeant, soit par le nombre des étincelles de même nature que l'on peut produire, est très-ancienne. Pour déterminer la charge d'une bouteille de Leyde, Canton [1] prenant cette bouteille d'une main, lui faisait donner une étincelle à un conducteur isolé, puis de l'autre main déchargeait le conducteur, et, répétant cette expérience jusqu'à ce que la bouteille fût entièrement déchargée, il estimait la charge totale par le nombre des étincelles. La méthode serait exacte si l'on pouvait s'arrêter à un état électrique déterminé; mais, dans cette expérience, les quantités d'électricité que perd la bouteille à chaque étincelle varient comme les termes d'une progression géométrique, et l'on peut en constater un nombre d'autant plus grand que les procédés d'observation sont plus délicats.

313. **Électromètre de Lane.** — Quelques années plus tard [2], Lane imagina un moyen d'obtenir des étincelles toujours identiques. Son électromètre se compose d'une bouteille de Leyde dont l'armature extérieure communique avec une boule B (fig. 143) que l'on peut, à l'aide d'une vis micrométrique F, rapprocher plus ou moins d'une autre boule A qui termine l'armature intérieure. Si le bouton B communique avec le sol et la boule A avec un appareil producteur d'électricité, une machine

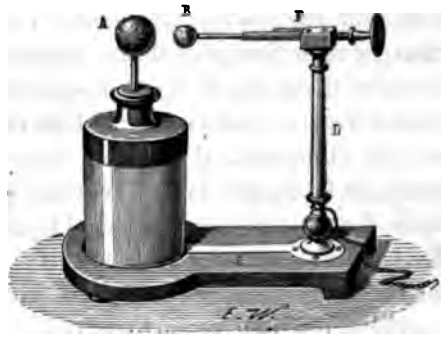


Fig. 143.

[1] Priestley, t. I, p. 249.
[2] *Phil. trans. abridged*, vol. XII, p. 475 (1767).

électrique par exemple, il se produira spontanément une étincelle entre les deux boules lorsque le potentiel de l'armature intérieure aura acquis une certaine valeur. Toutefois, la décharge n'est pas complète après chaque étincelle, à cause des résidus; mais, le phénomène se reproduisant d'une manière continue, la quantité totale d'électricité qui s'écoule est proportionnelle au nombre des étincelles. L'unité de mesure, c'est-à-dire la quantité d'électricité dépensée à chaque étincelle, est proportionnelle à la capacité de la bouteille et dépend de la distance explosive, ce qui permet de la modifier à volonté; elle varie aussi, comme l'a montré M. Gaugain, avec la résistance du conducteur qui joint l'armature extérieure avec la boule B.

Comme cet appareil a de nombreuses applications, il importe d'en surveiller la construction pour que les indications aient une certaine valeur. Si l'armature intérieure est formée de feuilles de clinquant, au milieu desquelles plonge une tige terminée en boule à sa partie supérieure, il arrive qu'au bout d'un certain nombre d'étincelles, les feuilles de clinquant situées au voisinage de la tige se sont volatilisées, et qu'il se forme autour de cette tige une cheminée isolante. Cet accident n'a pas grande importance lorsque l'étincelle extérieure est assez longue, mais si l'on veut rapprocher les boules à une petite distance, les décharges ne se font plus d'une manière régulière. Il est donc nécessaire d'assurer la communication parfaite de la boule fixe A avec l'armature intérieure. Si l'on emploie des feuilles d'étain ou de clinquant, il faut en bourrer la bouteille complétement, de façon que la tige centrale y pénètre à frottement dur: mais il vaut peut-être mieux, si le goulot est assez large, coller des bandes d'étain sur toute la surface intérieure et la maintenir en communication avec la boule par plusieurs tiges de laiton courbées qui font ressort contre les parois.

D'autre part, les étincelles violentes arrachent des parcelles métalliques et détériorent les surfaces des boules à explosion, ce qui peut en modifier les conditions; M. Riess recommande de réunir la boule B avec l'armature extérieure par un long fil, afin que la plus grande partie de la chaleur fournie par la décharge se dégage sur ce fil et non dans l'étincelle elle-même. Il faut alors que le micromètre soit porté par une tige en verre.

afin que la communication de la boule B avec l'armature extérieur puisse être établie d'une manière quelconque.

314. **Micromètre à étincelles.** — Nous verrons que la distance explosive entre deux conducteurs est, entre certaines limites, proportionnelle à la valeur du potentiel sur l'un d'eux, l'autre étant en communication avec le sol, ou même, plus généralement, à la différence des potentiels des deux corps. D'après cela, la charge de la bouteille de Lane sera à peu près proportionnelle à la distance des deux boules. Quand on veut seulement comparer des différences de potentiel, on utilise souvent un appareil que M. Riess a appelé *micromètre à étincelles* et qui se compose simplement de deux boules isolées, dont l'une est fixe et dont l'autre peut être rapprochée ou éloignée de la première par une vis micrométrique. On peut se servir pour cela de la bouteille de Lane, et, si la condensation est un embarras, on la supprimera en enlevant la communication de la boule mobile avec l'armature extérieure et maintenant cette armature isolée.

315. **Mesure de la charge d'une batterie.** — Quand on veut employer la bouteille de Lane pour mesurer la charge d'une batterie, on peut disposer l'expérience de deux manières.

1° Quelquefois on isole la batterie : on fait communiquer l'armature intérieure avec la source d'électricité et l'armature extérieure avec le bouton A de la bouteille de Lane, dont l'armature extérieure communique avec le bouton B et avec le sol. A mesure que la batterie se charge, par exemple d'électricité positive, son armature extérieure prend par influence de l'électricité négative et envoie sur la bouteille de Lane de l'électricité positive qui produit les décharges. Si l'on supprime la source après n étincelles, l'armature intérieure de la batterie a pris une charge M_1 et un potentiel V_1, l'armature extérieure est au potentiel V_2, ce qui donne, en appelant C la capacité de la batterie,

$$M_1 = C(V_1 - V_2).$$

Si l'armature extérieure de la batterie était au potentiel zéro, sa charge serait $-M_1$; mais elle possède en outre une charge positive $+ m$ qui produit le potentiel V_2 sur cette armature et sur la bouteille de Lane, ce qui donne, en appelant C' la capacité

de ce nouveau conducteur

$$n = CV_2.$$

Enfin, la quantité d'électricité positive écoulée est $M_1 - n$, et, en appelant q celle qui correspond à chaque étincelle, on a

$$M_1 - n = nq$$

Si maintenant on décharge la batterie, le potentiel restera égal à V_2 sur les deux armatures, et, en admettant qu'il n'y a pas de résidu, la quantité de chaque électricité qui disparaît par l'étincelle est

$$M_1 = nq - n = nq - CV_2.$$

Comme il n'y a d'intérêt à mesurer que la quantité qui disparaît pendant la décharge, on voit que celle-ci ne sera proportionnelle au nombre des étincelles que si n est négligeable, c'est-à-dire si le potentiel V_2 est très-faible par rapport à celui qui correspond à chaque étincelle. A ce point de vue, l'emploi d'un fil fin dans la bouteille de Lane, comme l'indique M. Riess, serait un inconvénient, parce qu'alors les étincelles n'amènent plus le potentiel intérieur à zéro : mais il y a une autre cause d'erreur plus grave, qui tient au résidu de la batterie. Il est donc nécessaire ou d'évaluer le résidu, ou, ce qui est plus correct, de l'éliminer. Pour cela, il faut considérer la première décharge de la batterie comme non avenue, la recharger de nouveau de façon que la bouteille de Lane donne à peu près le même nombre d'étincelles et puis la décharger. Le résidu, tant sur la batterie que sur la bouteille de Lane, est le même dans les deux cas et la quantité d'électricité qu'on a dépensée dans cette nouvelle décharge est exactement proportionnelle au nombre des étincelles de la bouteille de Lane.

2° Le plus souvent on évalue la charge d'une batterie en opérant de la manière suivante : on met la source en communication avec l'armature intérieure A d'une bouteille de Lane isolée, l'armature extérieure de cette bouteille avec l'intérieur de la batterie et l'armature extérieure de la batterie avec le sol. La force électrique qui s'exerce entre deux conducteurs voisins et les densités électriques sur les faces qui sont en regard étant proportionnelles à la différence des potentiels, il est à peu près

évident que la production d'une étincelle entre deux conducteurs ne dépend que de la différence des potentiels et non de leurs valeurs absolues, et que la quantité d'électricité qui s'écoule à chaque étincelle est toujours la même. Avec la disposition actuelle, la charge de la batterie sera donc exactement proportionnelle au nombre des étincelles de la bouteille de Lane, et on éliminera l'influence des résidus par la répétition des expériences.

316. M. Riess a essayé de démontrer, par expérience, que la décharge brusque de la batterie est proportionnelle à la charge totale. Les deux armatures de la batterie étaient réunies séparément aux deux boules A′ et B′ d'un micromètre à étincelles écartées d'une certaine distance, et la bouteille de Lane était placée sur le trajet de la machine à l'armature intérieure. Dans ces conditions, il s'est produit une décharge entre les boules A′ et B′ après la sixième étincelle de la bouteille de Lane, et, en continuant de faire fonctionner la machine, chacune des décharges suivantes n'a plus exigé que cinq étincelles. Ce même rapport $\frac{5}{6}$ s'est maintenu quand on a changé de 1 à 9 la distance des boules A′ et B′, de sorte que le résidu a toujours été égal au sixième de la charge totale.

Toutefois, le phénomène est plus complexe qu'il ne le paraît, parce qu'après chaque décharge, les potentiels ne sont pas égaux sur les deux armatures de la batterie et la différence qui reste alors entre eux dépend de la distance explosive. Le rapport du résidu à la charge a pu rester constant dans ces expériences, mais on n'en peut pas conclure qu'il en serait de même si la batterie était déchargée chaque fois par deux conducteurs amenés en contact; il est à prévoir, au contraire, que le résidu croît moins vite que la charge totale et il vaut mieux éliminer cette cause d'erreur par la répétition d'expériences successives.

317. **Électroscope à décharges de M. Gaugain.** — L'électromètre de Lane ne convient qu'aux expériences dans lesquelles les potentiels sont assez élevés, parce qu'il est nécessaire d'apercevoir les étincelles; d'ailleurs ces étincelles cessent de se produire régulièrement lorsqu'elles sont trop courtes et alors les distances sont plus difficiles à déterminer. M. Gaugain a employé, pour les cas où les charges électriques sont très-faibles, un appareil de

mesure qu'il appelle *électroscope jauge* ou *électroscope à décharges*. C'est un électroscope ordinaire à feuilles d'or dans la cloche duquel on introduit une boule de laiton A (fig. 144), communiquant avec le sol. Quand l'électroscope est électrisé et que la charge est suffisante, les feuilles d'or divergent et l'une d'elles venant toucher la boule A décharge l'appareil. Si un corps électrisé communique avec l'électroscope et si l'on peut faire en sorte que l'électricité afflue lentement, il est clair que chacun des contacts de la feuille d'or laissera échapper la même quantité d'électricité et que la charge que possède le corps sera proportionnelle au nombre total des contacts obtenus jusqu'à ce que tout soit revenu à l'état neutre.

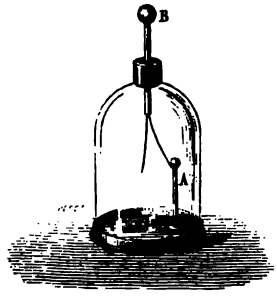


Fig. 144.

Pour que les décharges soient identiques, il faut que la feuille d'or, qui touche la boule A, se détache aussitôt après le contact; il est difficile d'empêcher, d'une manière absolue, qu'il ne se produise parfois des adhérences de quelques instants, mais on les évite autant que possible en ayant soin que la boule A soit bien polie et non vernie, ou même en la portant au rouge avant de l'introduire dans la cloche, ce qui produit à la surface de la boule une légère couche d'oxyde métallique. En tout cas, il est nécessaire de surveiller l'appareil pendant sa marche et de secouer légèrement la table toutes les fois que la feuille d'or ne tombe pas aussitôt après le contact.

On obtient maintenant l'écoulement lent d'électricité en reliant l'électroscope au corps électrisé par un conducteur médiocre, comme un fil de coton de 30 ou 40 centimètres de longueur, ou plutôt d'une longueur et d'un diamètre appropriés aux expériences que l'on a en vue, de manière à donner des décharges convenablement espacées. Si le fil est trop conducteur, les décharges sont trop rapides, la quantité d'électricité qui s'écoule à chaque contact n'est pas la même, parce que le contact ramène alors à l'état neutre, non-seulement l'électroscope, mais une partie du fil lui-même. Si le fil est trop isolant, les décharges sont trop

rares et la déperdition a une trop grande influence; il faut que l'intervalle des premières décharges soit d'au moins une ou deux secondes, et la vitesse d'écoulement se ralentit ensuite peu à peu. Il est bon aussi de supprimer toutes les barbes et les filaments qui entourent le fil de coton, en humectant ce fil avec de l'huile d'œillette; on évite ainsi l'une des causes de déperdition les plus actives.

318. Lorsque les décharges ont cessé, les pailles continuent de diverger sans atteindre la boule, et il reste alors sur le corps et sur l'électroscope, une certaine quantité d'électricité qu'il peut être utile d'évaluer.

Pour déterminer le résidu de l'électroscope, on charge un corps de grandes dimensions à un certain potentiel, puis on le décharge en le mettant en relation avec l'électroscope et on note le nombre n des contacts. On isole alors l'électroscope sans le ramener à l'état neutre, on porte de nouveau le corps au même potentiel, et, après l'avoir mis en relation avec l'électroscope, on obtient un nombre plus grand n' de décharges. La différence $n' - n$ représente, à moins d'une décharge près, le résidu de l'électroscope après la première expérience, puisque, à ce degré d'exactitude, le résidu final est le même dans les deux cas.

De même, pour déterminer le résidu sur un corps M, on le met en communication conductrice avec l'électroscope E, on relie le tout par un fil de coton avec un autre corps N de capacité beaucoup plus grande porté à un certain potentiel, et on compte le nombre m des décharges. Puis on isole M et E sans les ramener à l'état neutre, on charge N au même potentiel que précédemment et, rétablissant la communication avec l'électroscope, on compte un nombre m' de décharges.

Le résidu sur M et E est	$m' - m$,
le résidu sur l'électroscope E seul était	$n' - n$,
le résidu sur le corps M seul est donc	$m' - m - (n' - n)$.

Il vaut mieux, cependant, que les résidus soient toujours faibles par rapport aux charges totales, parce que la divergence des feuilles d'or qui persiste finalement n'est pas la même dans toutes les expériences et que, par suite, le résidu est variable, ce qu'il est facile de prévoir. Nous verrons d'ailleurs par plusieurs

exemples empruntés à M. Gaugain comment il convient d'employer cet ingénieux appareil.

Enfin, on peut en modifier la sensibilité en changeant la distance de la boule fixe, ou en remplaçant la feuille d'or par une lame d'étain, par un pendule, etc.

319. L'électroscope à décharges comporte, en réalité, des applications très-nombreuses. Ainsi, si l'on voulait comparer des quantités d'électricité, on pourrait mettre l'électroscope à décharges en communication, par un fil de coton, avec un cylindre de métal isolé (fig. 145) ouvert à l'une de ses extrémités. Quand on plongera dans l'intérieur de ce cylindre un corps électrisé quelconque, même non conducteur, le cylindre se chargera sur sa surface extérieure d'une quantité d'électricité égale à celle du corps influent et le nombre des contacts de la feuille d'or, y compris celui qui correspond au résidu, sera proportionnel à la charge du corps proposé. On pourra déterminer ainsi, par exemple, d'une manière très-simple, le partage électrique entre deux conducteurs de formes quelconques; il suffira, après les avoir électrisés et touchés l'un par l'autre, de les introduire successivement dans le cylindre de l'électroscope à décharges et de prendre le rapport du nombre total des décharges dans les deux cas; on se mettra d'ailleurs à l'abri de la déperdition en intervertissant l'ordre des expériences. Cette méthode aurait encore l'avantage de s'appliquer aussi facilement à la comparaison d'électricités de noms contraires.

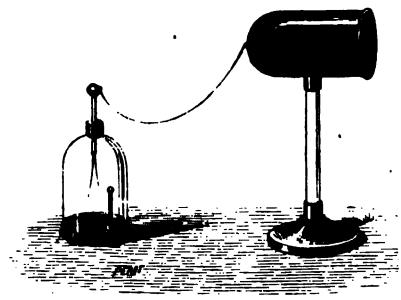


Fig. 145.

320. Enfin, l'électroscope à décharges peut encore servir à la comparaison de potentiels très-élevés pour lesquels les expériences sont si difficiles. Nous verrons que, si les extrémités d'un fil sont maintenus à des potentiels constants, la quantité d'électricité qui s'écoule par le fil pendant l'unité de temps est proportionnelle à la différence des potentiels extrêmes et d'autant plus

faible que le fil est plus résistant, c'est-à-dire plus long, plus mince et d'une substance moins conductrice. Il suffira donc de relier l'une des extrémités d'un fil de coton avec le conducteur dont on veut déterminer le potentiel et l'autre extrémité avec l'électroscope à décharges, en ayant soin de protéger l'appareil contre toute action étrangère par un écran électrique percé d'un trou au travers duquel passera le fil. La différence de potentiel entre les feuilles d'or et la boule étant tout à fait négligeable, le nombre des contacts observés pendant l'unité de temps sera proportionnel au potentiel à déterminer. Dans ce cas, l'expérience est même beaucoup plus simple parce qu'il n'y a pas de résidu à évaluer.

THERMOMÈTRES ÉLECTRIQUES.

521. Lorsqu'un corps conducteur est ramené à l'état neutre, ou, plus généralement, lorsque deux conducteurs électrisés à des potentiels différents sont mis en communication, le déplacement des fluides électriques (182) est accompagné d'une diminution de l'énergie totale. Cette perte d'énergie se traduit soit par la production d'un travail mécanique tel que l'élévation d'un poids, soit par un dégagement de chaleur sur les différents corps qui interviennent dans le phénomène. Si le travail mécanique est nul, on peut chercher dans le dégagement de chaleur la mesure de l'énergie dépensée pendant la décharge.

Sans insister, pour le moment, sur la manière dont la chaleur totale, due à la décharge, se partage sur les différentes parties du chemin que parcourt le flux électrique, on peut remarquer que la décharge est toujours accompagnée d'une étincelle, laquelle absorbe une partie plus ou moins grande de l'énergie. M. Riess a insisté d'une manière particulière sur cette circonstance, constatée déjà par les anciens expérimentateurs, que la puissance de l'étincelle est d'autant plus faible que le circuit parcouru par l'électricité est moins conducteur, ou, en d'autres termes, présente plus de résistance. Ainsi, quand on réunit les deux armatures d'une batterie par une tige de cuivre, l'étincelle est bruyante; avec un fil de cuivre plus long et plus mince,

l'étincelle diminue pour une même charge de la batterie; un fil de platine de mêmes dimensions donne encore une étincelle beaucoup plus faible; enfin, quand on substitue une petite couche d'eau aux fils de métal, la décharge a lieu sous la forme d'une petite flamme sans bruit. Dans ce cas, la presque totalité de la chaleur s'est dégagée dans le liquide. On voit, en résumé, que l'on peut concentrer l'énergie calorifique due à la décharge soit dans l'étincelle elle-même, soit dans un fil de grande résistance interposé sur le trajet de l'électricité; il reste à évaluer la quantité de chaleur dégagée dans les deux cas.

322. **Thermomètre de Kinnersley.** — Kinnersley [1] a imaginé un instrument qu'il croyait propre à mesurer la quantité de chaleur dégagée par l'étincelle elle-même. Cet instrument se compose d'un cylindre de verre V (fig. 146), fermé à la partie inférieure par une garniture métallique qui lui sert de pied, et bouché à la partie supérieure par une autre garniture de métal. Dans l'intérieur du cylindre sont deux boules conductrices, *a* et *b*, communiquant séparément avec les deux garnitures, et dont l'une *a* peut être élevée ou abaissée par une tige. Un tube latéral plus étroit K communique avec le cylindre; on met dans ces deux vases communiquants une certaine quantité de liquide, de l'eau colorée par exemple, et l'on note avec un index le niveau dans le tube étroit. Le thermomètre étant ainsi préparé, on met la garniture inférieure en communication avec l'armature extérieure d'une bouteille de Leyde par une chaîne métallique, et l'on approche de la boule A le bouton de l'armature intérieure. Il se produit alors deux étincelles, l'une à l'extérieur du thermomètre et l'autre entre les boules *a* et *b*. Celle-ci échauffe l'air qu'elle traverse et refoule le liquide dans le tube latéral où le niveau s'élève d'une certaine quantité; le déplace-

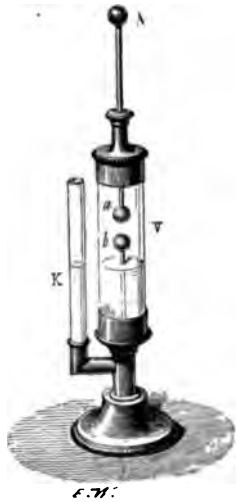


Fig. 146.

[1] Lettre de Kinnersley à Franklin (1761). *Œuvres de Franklin*.

ment du liquide augmente avec l'énergie de l'étincelle, et il est d'autant plus grand que le tube latéral est plus étroit.

Cet appareil de Kinnersley ne peut guère être employé dans des expériences de mesure; il ne donne pas de résultats très-réguliers, parce que l'effet est trop brusque et qu'en même temps qu'elle échauffe l'air, l'étincelle arrache des particules métalliques aux boules *a* et *b* et les volatilise, ce qui complique beaucoup le phénomène. On a conservé cet appareil dans les cours uniquement pour montrer, par une expérience simple, le dégagement de chaleur dû à la décharge. Pour augmenter l'effet, il est même bon de noyer la boule inférieure à une petite profondeur au-dessous du niveau du liquide; l'étincelle peut alors, en traversant cette couche, produire brusquement une grande quantité de vapeur, faire sortir le liquide du tube latéral, et même le projeter à une certaine hauteur.

323. **Thermomètre de M. Harris.** — M. Harris [1] a modifié le thermomètre de Kinnersley d'une manière avantageuse en plaçant un fil de métal très-fin dans la boule d'un véritable thermomètre à air, composé d'un ballon de verre communiquant avec un tube capillaire. Ce tube, recourbé deux fois, renferme une certaine quantité de liquide qui remplit la branche horizontale et s'arrête à un certain point dans les deux branches verticales. Le passage d'une décharge électrique au travers du fil produit une certaine quantité de chaleur qui échauffe le fil d'abord, puis se communique peu à peu au gaz ambiant dont il augmente la pression. Le déplacement du liquide est ainsi moins brusque que dans le thermomètre de Kinnersley, et, comme il n'y a pas d'effets secondaires qui compliquent le phénomène, on peut évaluer, par le changement de niveau dans les tubes, la quantité de chaleur dégagée dans le fil. Sans qu'il soit nécessaire de faire aucun calcul, il est évident que l'accroissement de pression et, par suite, le déplacement de liquide sont proportionnels à la quantité de chaleur dégagée.

324. **Thermomètre de M. Riess.** — Toutefois, l'appareil de M. Harris manque un peu de sensibilité, parce que le fil, étant rectiligne, ne peut avoir une grande longueur; il n'absorbe qu'une

[1] *Phil. Trans.* (1827), p. 18.

petite fraction de la chaleur totale de la décharge et la communique à une masse de gaz trop grande.

M. Riess (1) y a apporté deux modifications ingénieuses. Le fil de métal a été remplacé par une hélice en platine S (fig. 147), qui peut présenter une très-grande résistance, suspendue à deux bornes A et B. Le tube capillaire, au lieu d'être vertical, est posé sur une planchette que l'on peut incliner d'un angle quelconque à l'aide d'un arc K et d'une vis de pression, et il communique avec un tube vertical E d'un grand diamètre par lequel on introduit une certaine quantité de liquide; le liquide employé par

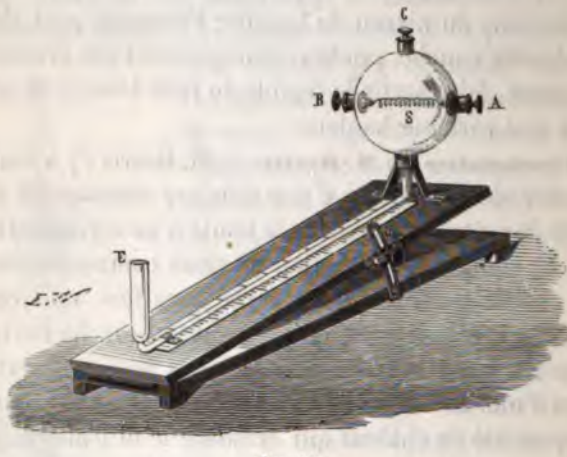


Fig. 147.

M. Riess était un mélange d'acide sulfurique et d'alcool auquel on avait ajouté un peu de matière colorante.

L'excès de pression du gaz produit par l'échauffement se traduit ainsi par un déplacement plus long dans le tube capillaire, et l'on peut modifier la sensibilité à volonté. Sur la boule est mastiquée une tubulure C fermée par un bouchon, par laquelle on peut mettre l'air du thermomètre en communication avec l'atmosphère et le ramener à la pression extérieure au commencement de chaque expérience.

Comme l'échauffement du gaz est très-rapide, le liquide atteint, presque aussitôt après la décharge, son maximum de déplace-

(1) *Reibungselektricität*, Bd. I, p. 391.

ment, et l'on peut négliger la perte de chaleur qui a lieu par conductibilité ou par rayonnement. Le changement de pression et le changement de volume du gaz sont proportionnels à la quantité de chaleur dégagée et au déplacement du niveau dans le tube capillaire. Ces déplacements suffiront donc pour indiquer les rapports des quantités de chaleur dégagées dans différentes expériences.

325. Le calcul de la quantité absolue de chaleur dégagée est à peu près inutile; il ne présente, d'ailleurs, aucune difficulté.

Soit V le volume primitif du gaz, t sa température et H sa pression évaluée en colonne du liquide employé, d le nombre de divisions dont le liquide s'est déplacé, u le volume de chaque division, h le changement de pression correspondant, et t' la nouvelle température. On aura, en appelant α le coefficient de dilatation des gaz,

$$\frac{VH}{1+\alpha t} = \frac{(V+du)(H+h)}{1+\alpha t'},$$

ou

$$\frac{1+\alpha t'}{1+\alpha t} = \left(1+d\frac{u}{V}\right)\left(1+\frac{h}{H}\right).$$

Comme l'élévation de température $t'-t$ est très-faible, on peut remplacer cette équation par la suivante :

$$\frac{\alpha(t'-t)}{1+\alpha t} = d\frac{u}{V}+\frac{h}{H}. \qquad (1)$$

Si S est la section du tube E, s la section du tube capillaire, x le changement de niveau dans le tube E et β l'angle du tube capillaire avec l'horizon, on a

$$Sx = du$$

$$h = x+\frac{du}{s}\sin\beta = du\left[\frac{1}{S}+\frac{\sin\beta}{s}\right] = kd,$$

en posant

$$k = u\left(\frac{1}{S}+\frac{\sin\beta}{s}\right).$$

En remplaçant h par cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$\frac{\alpha(t'-t)}{1+\alpha t} = d\left[\frac{u}{V} + \frac{k}{H}\right]. \tag{2}$$

D'autre part, appelons P le poids du fil, C sa chaleur spécifique et T la température qu'il aurait atteinte s'il eût gardé seul la quantité de chaleur Q que lui fournit la décharge, p le poids de l'air et c sa chaleur spécifique, on a aussi

$$Q = PC(T-t) = (PC+pc)(t'-t). \tag{3}$$

On en déduit

$$Q = (PC+pc)\left(\frac{1}{\alpha}+t\right)\left(\frac{u}{V}+\frac{k}{H}\right)d, \tag{4}$$

$$T-t = \left(1+\frac{pc}{PC}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+t\right)\left(\frac{u}{V}+\frac{k}{H}\right)d. \tag{5}$$

Toutes les quantités comprises entre parenthèses étant constantes quand on ne modifie pas l'appareil, on voit que la quantité de chaleur dégagée et l'échauffement théorique du fil sont proportionnels au nombre de divisions dont le liquide s'est déplacé. On remarquera aussi que, pour une même décharge, l'effet est sensiblement indépendant des petites variations que peuvent éprouver la pression primitive H et la température initiale t.

Toutefois, si l'on voulait se servir de cette formule pour des mesures absolues, il faudrait faire attention que la masse de gaz qui constitue le thermomètre change en même temps de volume et de pression; par suite, la chaleur spécifique que l'on doit introduire dans les formules est une quantité intermédiaire entre la chaleur spécifique de l'air à volume constant et sa chaleur spécifique à pression constante, et la valeur de cette chaleur spécifique particulière dépend des dimensions de l'appareil et de l'inclinaison du tube. Pour éviter toute difficulté, il vaudrait mieux, dans des expériences de cette nature, mettre le tube horizontal, afin que la pression du gaz reste constante.

326. **Thermomètre inscripteur.** — On peut encore employer les méthodes d'inscription [1] qui permettent de réaliser

[1] *Journal de Physique*, t. II, p. 315.

rapidement une série d'expériences dont on examine ensuite les résultats à loisir. Pour cela, le thermomètre (fig. 148) est formé d'un tube de verre terminé par deux garnitures entre lesquelles est suspendue une hélice de fil de platine. Les garnitures sont munies de crochets C et C′ et de bornes à vis de pression P et P′, par où l'on produira les décharges dans le fil. La garniture supérieure porte, en outre, une tubulure S que l'on met en communication, par un tube de caoutchouc, avec un tambour à levier comme ceux dont M. Marey a tiré un si grand parti dans ses expériences de physiologie.

Fig. 148.

Ce tambour est formé d'une capsule de métal (fig. 149) munie d'un tube T, et fermée par une membrane de caoutchouc sur laquelle repose une plaque de métal munie d'une petite tige. Quand la

Fig. 149.

pression du gaz dans le tambour augmente pour une cause quelconque, comme l'échauffement produit par la décharge

Fig. 150.

dans le thermomètre, la membrane se gonfle et soulève un levier OAB dont l'extrémité est munie d'une pointe. La figure 150

montre d'une manière plus complète le détail de cet ingénieux instrument. La pointe du levier, dont le déplacement est très-notable pour un petit changement de pression, s'appuie sur un cylindre couvert d'une feuille de papier enfumé et mû par un mouvement d'horlogerie.

327. Si la quantité de chaleur dégagée est faible, on peut être assuré, sans faire aucun calcul, que les changements de volume du gaz, les variations de pression et les déplacements du levier sont proportionnels entre eux et proportionnels à la quantité de chaleur fournie par la décharge. Dans la figure 151, par exemple, qui est une reproduction aussi fidèle que possible des courbes obtenues par les décharges d'une batterie, les traits horizontaux

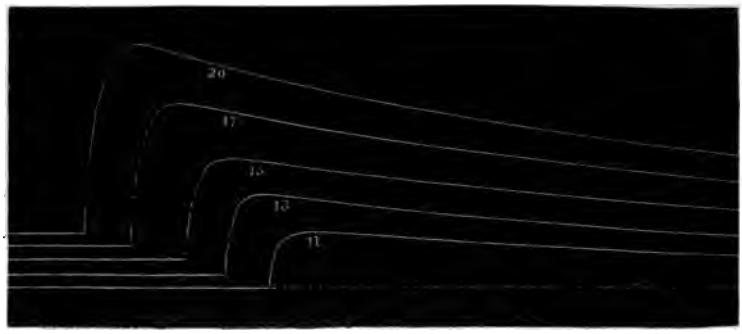


Fig 151.

correspondent à la position de la pointe avant la décharge; la courbe se relève brusquement au moment où l'explosion a lieu. On voit par la forme des courbes que l'échauffement de l'air n'est pas instantané ; il atteint rapidement son maximum, puis le refroidissement lent se produit d'une manière régulière.

La figure correspond à des expériences dans lesquelles l'explosion provenait d'une batterie chargée de quantités d'électricités variables ; les numéros des différentes courbes indiquent les nombres des étincelles d'une bouteille de Lane qui servait à mesurer la charge électrique. Pour comparer les quantités de chaleur, il suffit donc de mesurer sur le papier les ordonnées maxima de ces différentes courbes.

On obtient ainsi :

NOMBRE D'ÉTINCELLES n	ORDONNÉE MAXIMUM h	$1000\frac{h}{n^2}$	REFROIDISSEMENT h'	$1000\frac{h+h'}{n^2}$
11	7,4	60,9	0,5	65,3
13	10,6	60,3	0,8	67
15	13,3	59,6	1,1	65
17	19	66	1,4	70,6
20	25,5	63,7	2	68,7

On peut encore faire le calcul d'une manière plus complète en tenant compte des pertes subies par l'appareil pendant la période d'échauffement. La courbe de refroidissement permet de déterminer, soit par le calcul, soit par une construction graphique, la déperdition qui a lieu pendant la période ascendante. En ajoutant cette perte à l'ordonnée maximum, on obtiendra le déplacement qu'aurait fourni l'appareil s'il eût été à l'abri de cette cause d'erreur. La quatrième colonne du tableau indique cette perte, et les calculs de la cinquième ont été faits avec des nombres ainsi corrigés. On voit, d'après la troisième et la cinquième colonnes, que la quantité de chaleur est sensiblement proportionnelle au carré du nombre des étincelles.

Je n'insiste pas, d'ailleurs, sur l'expérience elle-même, qui n'a pas été faite avec des soins particuliers; j'ai voulu seulement donner un exemple de la méthode d'inscription, et montrer que l'examen de pareilles courbes, même au point de vue des évaluations numériques, présente parfois des ressources que n'offre pas l'observation directe.

GALVANOMÈTRES.

328. L'écoulement d'électricité qui a lieu dans un conducteur, pendant les décharges électriques, est un phénomène tout à fait comparable aux courants que l'on obtient en réunissant par un fil les deux pôles d'une pile de Volta. Dans les deux cas, en effet, on peut décomposer les corps tels que l'eau, dévier l'aiguille aimantée et provoquer l'aimantation; il y a cependant

une distinction à établir entre les deux genres de phénomènes. Un courant électrique ordinaire est continu et produit des effets réguliers : la décomposition des corps s'effectue avec séparation des éléments; l'aiguille aimantée est déviée de façon que le pôle Nord se porte à la gauche du courant, et l'action qu'elle éprouve est proportionnelle à l'intensité du courant, c'est-à-dire à la quantité d'électricité qui passe dans le fil pendant l'unité de temps. Les décharges électriques, au contraire, sont en général un phénomène tellement brusque, qu'il est difficile de prévoir et d'en régulariser les effets : le passage d'une décharge au travers de l'eau ou d'un composé chimique produit bien une décomposition partielle, mais le plus souvent les éléments de la combinaison restent mélangés; d'autre part, une aiguille aimantée, située dans le voisinage d'un conducteur traversé par la décharge, n'est généralement pas déviée, mais son magnétisme peut être profondément modifié.

329. **Expériences de Colladon.** — Colladon a montré [1] que, si la décharge est continue, comme celle que l'on obtient en maintenant en communication avec le sol le conducteur d'une machine électrique en mouvement, ou bien en réunissant les armatures d'une batterie par un corps médiocrement conducteur, ce genre de décharges agit sur l'aiguille aimantée comme un courant électrique ordinaire, en portant le pôle Nord vers la gauche du courant d'électricité positive. On peut alors employer, pour observer ces phénomènes, les galvanomètres ordinaires, dont nous ne donnerons pas ici la description.

Colladon s'est servi d'abord d'un galvanomètre de Nobili à deux aiguilles (fig. 152) dont le cadre était entouré par cent tours de fil recouvert d'une double couche de soie. Il est nécessaire, en effet, d'isoler le mieux possible les différentes spires du multiplicateur, pour éviter que la décharge ne passe d'une spire à l'autre sous forme d'étincelle. Les deux fils du galvanomètre étant terminés par des pointes très-effilées, on les approcha des deux armatures d'une batterie électrisée, composée de trente jarres, dont la surface totale était de 4000 pieds carrés. L'aiguille du galvanomètre commença à se déplacer quand les pointes furent à 4 ou

[1] *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XXXIII, p. 62.

5 centimètres des armatures ; pour une distance de 1 ou 2 centimètres, la déviation atteignit 23° et l'aiguille revint à sa position primitive au bout de quelques secondes. Colladon a constaté, en intervertissant l'ordre des fils ou en chargeant la batterie d'électricité différente, que la déviation de l'aiguille se fait toujours du côté prévu par la direction suivant laquelle s'écoule l'électricité positive. La durée de la décharge augmente avec la distance des pointes, et l'on peut ainsi maintenir l'aiguille déviée pendant plus d'une minute. Il faut seulement éviter d'approcher les pointes assez près des armatures de la batterie, pour que la décharge ait lieu sous forme d'explosion.

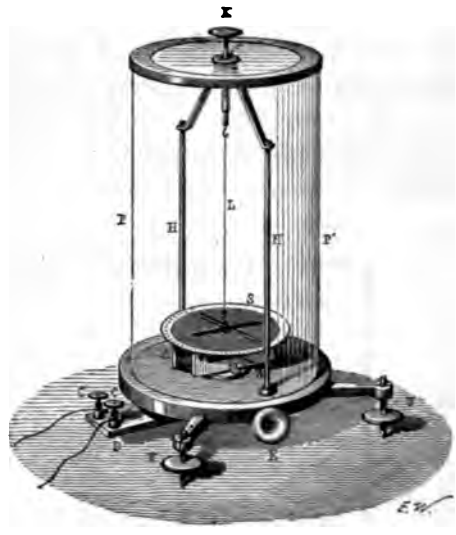


Fig. 152.

Comme la résistance du fil de communication nécessaire pour ralentir la décharge est considérable par rapport à celle du galvanomètre, on peut multiplier le nombre des tours sans inconvénient. Colladon s'est servi d'un galvanomètre de 500 tours dont le fil était doublement recouvert de soie et dont les différentes couches de spires étaient séparées par des feuilles de taffetas ; il obtint ainsi des déviations dix fois plus grandes.

En réunissant les deux fils du galvanomètre aux deux conducteurs d'une machine de Nairne, il a vérifié que la déviation de l'aiguille est proportionnelle à la vitesse de rotation de la machine, dans les limites entre lesquelles la proportionnalité a lieu aussi pour les courants ordinaires. La même expérience réussit avec les machines de Ramsden quand les coussins communiquent bien avec le sol et que le fil du galvanomètre communique, d'une part avec le sol et, d'autre part, avec le con-

ducteur de la machine. Si les communications des coussins sont insuffisantes, l'aiguille est agitée sans déviation permanente.

On obtient des effets plus réguliers en approchant seulement du conducteur de la machine l'une des extrémités du fil du galvanomètre terminée en pointe; la vitesse de rotation de la machine étant supposée constante, l'intensité du courant varie alors avec la distance de la pointe au conducteur, comme on le voit d'après les expériences suivantes.

DISTANCE DE LA POINTE AU CONDUCTEUR D	INTENSITÉ DU COURANT I	ID
1 centimètre.	20	20
2,5	20	50
5	19,5	97,5
10	18	180
20	10	200
40	5,5	220
80	3	240
100	2	200

Il résulte donc de ces expériences de Colladon deux conséquences :

1° L'action exercée sur une aiguille aimantée par la décharge continue d'une machine électrique est proportionnelle au débit de la machine;

2° L'intensité du courant qui s'établit au travers de l'air, entre le conducteur d'une machine électrique et un conducteur terminé en pointe communiquant avec le sol, diminue à mesure que l'épaisseur d'air augmente et tend à devenir en raison inverse de cette épaisseur.

330. **Méthode de Faraday.** — Ainsi la décharge d'une batterie peut être effectuée par l'intermédiaire d'un conducteur assez mauvais pour qu'elle dure longtemps et produise une déviation constante de l'aiguille du galvanomètre, mais alors cette déviation est très-faible. Si la décharge, au contraire, tout en restant

très-rapide, n'est plus instantanée, elle donne lieu à un courant dont l'intensité moyenne est en raison inverse de la durée, et qui projette l'aiguille à une certaine distance. Faraday (1) a démontré que l'arc d'impulsion, communiqué ainsi à une aiguille, est indépendant de la surface de la batterie et du corps mauvais conducteur par lequel s'effectue la décharge, et proportionnel à la quantité d'électricité qui s'écoule.

Une batterie de 8 jarres, chargée par 30 tours de plateau d'une machine ordinaire, puis déchargée dans le galvanomètre par l'intermédiaire d'une corde mouillée, projeta l'aiguille jusqu'à 5 divisions et demie d'une échelle arbitraire; en ajoutant 7 jarres à la batterie et chargeant par le même nombre de tours, il obtint exactement la même déviation, et plusieurs expériences alternatives avec les deux batteries donnèrent toujours le même résultat.

La batterie entière, chargée par 50 tours de machine, fut ensuite déchargée par l'intermédiaire d'un simple fil mouillé, puis par un cordon mince de 38 pouces de longueur humecté d'eau distillée, puis par une corde d'épaisseur 12 fois plus grande et de 12 pouces de longueur trempée dans de l'eau acidulée. Avec la corde épaisse la décharge fut presque instantanée, elle dura un temps appréciable avec le cordon mince et, quand on employa le fil, il fallut deux ou trois secondes pour que l'électromètre de la batterie revint au zéro. Dans tous les cas, la déviation de l'aiguille a été sensiblement la même.

Enfin, la batterie fut chargée par 60 tours de plateau; l'impulsion donnée à l'aiguille fut exactement de 11 divisions, c'est-à-dire double de celle qu'on avait obtenue avec une charge moitié moindre.

Toutefois, cette méthode ne donne des résultats concordants que s'il ne se produit pas de décharges sous forme d'étincelles entre les spires du galvanomètre, parce qu'alors une partie du courant ne traverse pas le circuit complet et le magnétisme des aiguilles peut être altéré. Dans les expériences suivantes de M. Riess (2), la charge des batteries était évaluée par une bouteille de Lane, et la décharge avait lieu par l'intermédiaire de corps

(1) *Experimental Researches*, t. I, p. 102.
(2) *Reibungselektricität*, Bd I, p. 478.

différents. On voit que la déviation ne dépend que de la quantité d'électricité, mais, à la fin de chaque série, il se manifeste une perturbation due à la production d'étincelles entre les spires du galvanomètre.

DURÉE DES OSCILLATIONS DE L'AIGUILLE	CORPS INTERPOSÉS	NOMBRE DE BOUTEILLES DE LA BATTERIE	CHARGE ÉLECTRIQUE	DÉVIATION DE L'AIGUILLE
6″,8	Eau.	7	18	32°
	»	2	18	31
	»	7	18	31
	Solution de sel ammoniac.	7	18	21
10″	Eau.	7	10	27
	»	1	10	27
	Corde de coton.	1	10	27
	»	7	10	27
	Solution de sel ammoniac.	7	10	30
6″,2	Solution de sel ammoniac.	7	8	15
	»	7	8	14
	Eau.	7	8	13
	»	1	8	14
	Cylindre de bois.	7	8	14
		1	8	12

331. **Électro-dynamomètre de Weber.** — Enfin, on peut employer, pour le même genre de recherches, l'*électro-dynamomètre* de Weber (1). Cet instrument (fig. 153) est un galvanomètre où l'aiguille aimantée est remplacée par un solénoïde dans lequel le plan des spires est perpendiculaire à celui des spires du multiplicateur. Le solénoïde est suspendu à deux fils de métal attachés à la partie supérieure d'une cheminée en verre. On a ainsi une suspension bifilaire par laquelle on peut faire passer le courant dans le solénoïde mobile et donner à cet appareil une torsion quelconque. Des poulies convenablement disposées, avec des vis de rappel, permettent de rapprocher plus ou

(1) *Pogg. Annalen*, t. LXXIII, p. 197.

moins les deux fils et de modifier la sensibilité ; on observe, d'ailleurs, les déviations par un miroir à réflexion, ce qui permet d'opérer avec des angles très-faibles. Dans le cas actuel, l'action réciproque du multiplicateur et du solénoïde est proportionnelle à l'intensité du courant qui passe dans chacun d'eux, et, si le même courant circule dans les deux bobines, l'action sera proportionnelle au carré de l'intensité. Si ce courant est obtenu par la décharge d'une batterie s'effectuant pendant un temps très-court θ, l'intensité moyenne du courant sera égale au quotient $\frac{m}{\theta}$ de la quantité d'électricité par la durée de la décharge ; l'angle d'impulsion α', étant proportionnel à l'action électrique et à la durée de la décharge, sera donné par l'expression

$$\alpha' = A' \frac{m^2}{\theta^2} \theta = A' \frac{m^2}{\theta}.$$

La même décharge, passant dans un galvanomètre à aiguille aimantée, donnera un arc d'impulsion α, proportionnel seulement à la quantité d'électricité,

$$\alpha = Am.$$

On en déduit

$$\frac{\alpha^2}{\alpha'} = \frac{A^2}{A'} \theta = a\theta.$$

Fig. 133.

Weber (1) a réalisé cette expérience en plaçant en même temps,

(1) *Elektrodynamische Maasbestimmungen*, p. 84.

sur le trajet de la décharge d'une batterie, un galvanomètre et un électro-dynamomètre, et il ralentissait le phénomène par le moyen d'une corde de chanvre de longueur variable, de 3[illegible],1 de diamètre, mouillée avant chaque expérience. La batterie était chargée chaque fois de façon qu'un électromètre à cadran indiquât la même déviation. L'unité de l'échelle des déviations correspond environ à 17°.

Longueur de la corde	Déviation — Galvanomètre x	Déviation — Électrodynamomètre x	$\frac{x^2}{x} = xd$
2 mètres	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]

On voit, d'après les nombres de la quatrième colonne, que la durée de la décharge augmente avec la longueur de la corde intercalée, et est à peu près indépendante de la déviation dans le galvanomètre, c'est-à-dire de la charge de la batterie.

En prenant pour la durée t la moyenne des nombres obtenus pour une même longueur de corde, on voit, par la comparaison suivante, que la durée de la décharge est sensiblement proportionnelle à la longueur de la corde intercalée.

Longueur de la corde l	Durée de la décharge t	$\frac{t}{l}$
1	[illegible]	11,5
2	[illegible]	11,1
3	[illegible]	[illegible]
4	101,1	12,6

CHAPITRE IX

EXPÉRIENCES RELATIVES A L'INFLUENCE ET A LA CONDENSATION. — CAPACITÉS ÉLECTRIQUES

ATTRACTIONS ET RÉPULSIONS.

332. **Action de deux corps à distance constante.** — Pour ne pas interrompre la suite des raisonnements, nous n'avons pas cité, à propos des conséquences de la théorie, les expériences qui en sont des vérifications ; nous devons revenir maintenant sur ce point, ce qui nous obligera parfois à quelques répétitions.

L'un des résultats les plus simples consiste en ce que l'action de deux corps, maintenus à distance constante et communiquant entre eux, est proportionnelle au carré de la charge, ou plus généralement au carré du potentiel.

Cette propriété, qui a servi de principe à la graduation de plusieurs électromètres, a été démontrée dès 1772 par Cavendish, d'après des manuscrits cités par M. Harris (1), de la manière suivante. Aux deux extrémités d'une tige métallique isolée, Cavendish attachait deux paires de pendules A et B à boules et fils de lin, que nous supposerons identiques. Les pendules d'une des paires ont été surchargés de poids de manière à exiger pour la même divergence une force répulsive quatre fois plus grande que ceux de la première. Il mettait alors le bouton d'une bouteille de Leyde électrisée en contact avec la tige; les pendules chargés B indiquaient, par exemple, une divergence de 12°, les autres une divergence beaucoup plus grande. Il touchait ensuite l'armature intérieure de la première bouteille par le bouton

(1) Harris, *Leçons d'électricité*, p. 155.

d'une autre bouteille identique à l'état neutre ; la capacité de la tige et des pendules étant insignifiante par rapport à celle des bouteilles, la charge de la première était, après ce contact, réduite de moitié et l'on constatait que la première paire de pendules A indiquait, à ce moment, une divergence de 12°. Cette méthode est excellente en principe, elle ne pèche un peu que par la difficulté de graduation de l'électromètre (263).

333. De même, si un corps A électrisé est maintenu à une distance constante d'un deuxième corps B communiquant avec le sol, l'attraction qui s'exerce entre eux est proportionnelle au carré de la charge ou au carré du potentiel du corps électrisé.

M. Harris (1) a essayé de vérifier cette propriété, par l'emploi de sa balance à flotteur (275) ; l'un des corps attractifs *b* étant maintenu en communication avec le sol, il touchait l'autre *a* par un cylindre électrisé porté par un pied isolant ; il évaluait l'attraction, soit par des contre-poids ajoutés de l'autre côté jusqu'à ce que l'aiguille fût revenue à une division déterminée, soit plus simplement en observant la déviation de l'aiguille et calculant par une table de graduation la force qui s'exercerait entre les deux plateaux par une même distance. Il touchait ensuite ce premier cylindre par un ou deux cylindres identiques isolés et à l'état neutre qu'il enlevait ensuite, et évaluait la nouvelle attraction après que la charge sur le premier était ainsi diminuée de moitié ou des deux tiers. Le tableau suivant, dans lequel m désigne les charges successives, et f la force attractive pour une même distance d'un pouce, montre que l'accord des expériences avec la théorie est satisfaisant.

$\frac{1}{m}$	f	$\frac{f}{m^2}$
1	30	30
2	7,8	31,2
3	3,27	29,43
4	1,8	28,8

(1) *Phil. trans.* 1834), p. 219.

Sous cette forme, l'expérience réussit difficilement, parce que la déperdition de l'électricité est notable et que la capacité du cylindre employé est trop faible par rapport à celle des corps attractifs.

Il vaut mieux maintenir le disque inférieur *a* en communication avec une grande bouteille de Leyde (fig. 125) à laquelle on donne des charges différentes par l'intermédiaire d'une bouteille de Lane ; M. Harris a reconnu ainsi que l'attraction des deux disques est proportionnelle au carré des nombres des étincelles de la bouteille de Lane.

334. L'électromètre de Cuthbertson (274) permet de vérifier aisément la même loi. Il suffit de mettre l'appareil en communication avec une batterie et de constater que les poids indiqués par les différentes positions du curseur sont proportionnels aux carrés des quantités d'électricité nécessaires pour faire basculer le fléau et provoquer la décharge de la batterie. Cuthbertson et Singer (1), dans une série d'expériences sur la comparaison des machines électriques, avaient trouvé que le nombre de tours de machine nécessaires pour provoquer la décharge de l'électromètre croît proportionnellement au déplacement de l'index, mais cette relation ne peut pas être exacte.

335. La même méthode a été employée par M. Riess (2) d'une manière plus rigoureuse. Un levier, analogue à celui de la balance, porte à l'une de ses extrémités un plateau et à l'autre une boule de métal qui se trouve, lorsque le fléau est horizontal, en contact avec une autre boule placée au-dessus et communiquant avec l'armature intérieure d'une batterie. L'équilibre étant établi de façon que ces boules se touchent sans pression, on surcharge le plateau par des poids *p* et on détermine par une bouteille de Lane la quantité d'électricité dont il faut charger la batterie pour que les boules se détachent. M. Riess a constaté ainsi que le poids *p* est proportionnel au carré de la densité électrique, c'est-à-dire au carré du quotient de la quantité d'électricité par le nombre des bouteilles de la batterie. Toutes les bouteilles étant identiques, ce rapport est proportionnel au potentiel de l'armature intérieure. Dans le tableau qui suit, les poids *p* sont éva-

(1) *Nicholson Journal*, t. XXVI, p. 218.
(2) *Reibungselektricität*, Bd I, p. 373.

lués en grains, n désigne le nombre des bouteilles de la batterie et m le nombre d'étincelles d'une bouteille de Lane dont les boules étaient écartées d'une demi-ligne ; on doit donc avoir, K étant un coefficient constant,

$$p = K\left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \text{ou} \quad p\left(\frac{n}{m}\right)^2 = K.$$

POIDS p	1 BOUTEILLE		2 BOUTEILLES		3 BOUTEILLES		4 BOUTEILLES		5 BOUTEILLES	
	m		m		m		m		m	
	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.
1	2	2,2	4,5	4,5	7	6,7	8,7	8,9	10	11,2
2	3,5	3,2	6	6,3	10	9,5	12	12,6	15,5	15,8
3	4	3,9	7,7	7,7	11,7	11,6	15	15,5	20	19,4
4	4,5	4,5	9	8,9	13,3	13,4	17,7	17,9	24	22,4

On voit que les nombres d'étincelles calculés s'accordent d'une manière satisfaisante avec les nombres observés, lesquels résultent de moyennes de deux séries d'expériences.

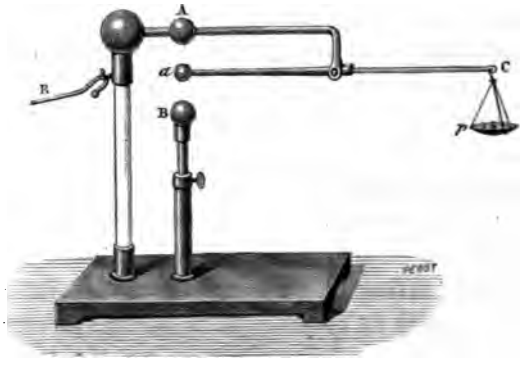


Fig. 154.

Dans une autre série de recherches, la boule mobile a (fig. 154) était repoussée par une boule supérieure A communiquant avec

elle, et en même temps attirée par une boule B placée en dessous et en communication avec le sol. La répulsion de la boule A et l'attraction de la boule B étant l'une et l'autre proportionnelles au carré de la densité moyenne sur la batterie, ou au carré du potentiel, la densité nécessaire pour détacher la boule *a* de son contact avec la boule supérieure A, ou pour abaisser cette boule à partir d'une position intermédiaire où elle a été maintenue par un arrêt, doit être proportionnelle à la racine carrée du poids additionnel *p*; c'est ce que montre le tableau suivant :

POIDS	2 BOUTEILLES		3 BOUTEILLES		4 BOUTEILLES	
p	*m*		*m*		*m*	
	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.	OBS.	CAL.
1	3,5	3,6	5,5	5,4	»	»
2	5	5,1	7,5	7,6	10	10,1
3	6	6,2	9,7	9,3	12	12,4
4	7	7,2	11	10,7	15	14,3

336. **Influence électrique entre deux plateaux.** — Volta avait imaginé, pour graduer ses électromètres, un moyen très-simple de donner à un corps des charges électriques croissantes dans un rapport quelconque (1), et il appliqua les instruments ainsi gradués à l'étude de l'attraction entre deux plateaux. Les étincelles successives d'un électrophore s'affaiblissent d'abord assez rapidement, mais à partir d'un certain ordre elles deviennent identiques entre elles; Volta s'en assurait, d'ailleurs, en constatant qu'une bouteille de Leyde, chargée par dix étincelles d'un électrophore, donnait toujours la même déviation aux pailles d'un électromètre, quand on répétait plusieurs fois l'expérience. D'autre part, la capacité d'une bouteille de Leyde ordinaire étant très-grande par rapport à celle d'un disque d'électrophore, on pouvait admettre que la charge de la bouteille était proportionnelle au nombre d'étincelles qu'on lui avait données par ce disque.

(1) *Collezione dell' opere*, t. I, part. II, p. 14.

Volta suspendit ensuite un disque conducteur au fléau d'une balance par des cordons de soie au-dessus d'une table, portant elle-même un plateau plus large non isolé, à une distance du premier d'environ 2 pouces. Le disque isolé était électrisé par une bouteille de Leyde et on déterminait les poids qu'il fallait placer dans l'autre plateau de la balance pour équilibrer l'attraction électrique. Volta a vérifié que, pour un même degré de l'électromètre, c'est-à-dire pour un potentiel constant, l'attraction est proportionnelle à la surface du disque mobile et que cette attraction est proportionnelle au carré du degré électrique, ou du potentiel.

Ainsi, dans une série d'expériences, les poids ayant été successivement 24, 12 ,6 et 3 grains, les déviations des pailles de l'électroscope produites par la bouteille qui servait à charger le disque étaient 45 degrés, 35, 25 et de 17 à 18. La proportionnalité des déviations aux charges étant sensiblement exacte jusqu'à 35° et la table de graduation indiquant une charge de 50 pour la première expérience, on obtient ainsi :

CHARGE ÉLECTRIQUE m	ATTRACTION DES DISQUES p	$\frac{p}{m^2}$
50	24	104
35	12	102
25	6	104
17,5	3	102

337. Les mêmes lois ont été vérifiées par M. Harris (1), en employant pour faire varier le potentiel sur le corps électrisé un simple phénomène d'influence. Un plateau conducteur isolé A (fig. 155) est mis en communication par un fil avec l'un des disques attractifs a de la balance, l'autre disque b communiquant avec le sol. Un deuxième plateau B, isolé aussi, est porté par une vis micrométrique qui permet de l'amener à différentes distances du plateau A. On met le plateau A en communication avec le sol.

(1) *Leçons d'électricité*, p. 135 et suiv.

on charge le plateau B avec une bouteille de Leyde, de capacité assez grande pour qu'elle n'éprouve par ce contact qu'une perte inappréciable; puis on isole A, on enlève B, et on détermine l'action qui s'exerce entre les disques *a* et *b* à une certaine distance. On recommence ensuite la même opération pour une autre distance entre les plateaux A et B. M. Harris a ainsi reconnu que la force attractive entre les disques *a* et *b* est exactement en raison inverse du carré de la distance des plateaux A et B. Il en résulte que la quantité d'électricité produite par influence sur le plateau A est en raison inverse de la distance du plateau influent B, ce qui est une conséquence de la théorie (178).

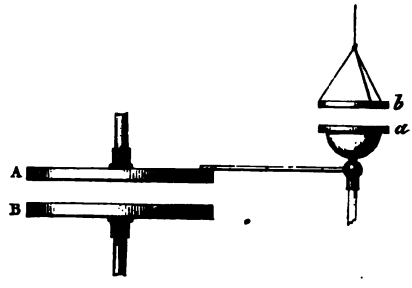


Fig. 155.

Si l'on charge le plateau A par la bouteille de Leyde, le plateau B étant en communication avec le sol puis enlevé, la force attractive des disques est encore en raison inverse du carré de la distance des plateaux. Cela devait être, puisque la capacité électrique du plateau A est sensiblement en raison inverse de sa distance au plateau B.

Enfin, si les deux disques de la balance *a* et *b* sont chargés d'électricités contraires et isolés, ils s'attirent en raison inverse de la distance qui les sépare. La loi constatée par M. Harris doit être exacte, au moins entre certaines limites qui dépendent des dimensions des disques attractifs, puisque l'action d'un plan électrisé sur un point extérieur est en raison inverse de la distance de ce point au plan.

La théorie de l'influence entre deux plans parallèles a d'ailleurs été étudiée et vérifiée d'une manière complète par M. Thomson, à propos de la construction des électromètres absolus.

338. **Action de deux sphères.** — M. Harris a déterminé aussi l'action de deux sphères égales, dont l'une est maintenue en communication avec une bouteille de Leyde, c'est-à-dire à un

potentiel constant, et l'autre non isolée. Il a trouvé que l'attraction est sensiblement en raison inverse de la distance c des centres des deux sphères et de la distance $(c - 2r)$ de leurs surfaces. En prenant le rayon des sphères pour unité, et désignant par F la force attractive, on a donc

$$F = \frac{K}{c\,(c-2)}.$$

Cette expression s'accorde parfaitement avec les résultats de M. Harris, mais elle ne peut être considérée, suivant aucune théorie, comme représentant la loi physique du phénomène. En effet, d'après cette formule, l'action à une grande distance deviendrait en raison inverse du carré de la distance des centres; mais, si les sphères sont très-éloignées, la charge de la sphère non isolée tend à devenir en raison inverse de la distance, la force attractive est proportionnelle au produit des charges des deux boules et en raison inverse du carré de la distance, de sorte que, finalement, l'action doit être en raison inverse de c^3. M. Thomson (1) a appliqué au cas des expériences de M. Harris les formules qu'il a données pour l'attraction des sphères. Le tableau suivant montre que les résultats ainsi calculés diffèrent sensiblement de ceux de l'observation, mais les différences se manifestent dans le sens que l'on pouvait prévoir; et, d'autre part, les expériences de M. Harris n'ont pas été faites avec assez de soin, pour que ce défaut de concordance puisse être considéré comme une objection à la théorie.

DISTANCE DES CENTRES	ATTRACTION		
	OBSERVÉE	CALCULÉE PAR LA FORMULE	
		DE M. HARRIS	DE M. THOMSON
2,3	15	«	»
2,5	8,25	8,28	7,94
2,8	4,6	4,62	4,18
3	3,3	3,45	3

(1) *Reprint of papers*, p. 21.

CAPACITÉS ÉLECTRIQUES.

339. **Méthodes expérimentales.** — Cavendish, d'après ses manuscrits (1), avait imaginé une méthode pour comparer les capacités électriques des deux corps différents, en employant comme corps de comparaison un plan conducteur d'étendue variable. Il électrise par une même source deux bouteilles de Leyde identiques, touche l'un des corps à étudier A par l'armature intérieure de la première bouteille, puis le plan conducteur P par l'armature extérieure de la seconde. Le corps et le plan sont ainsi chargés d'électrités contraires, et si, en les mettant en communication, on les ramène à l'état neutre, c'est que leurs capacités sont égales ; on arrive par tâtonnements à réaliser cette condition. Si les deux corps A et B que l'on veut comparer équivalent à une même étendue du plan, ils ont la même capacité ; dans le cas contraire, les dimensions des plans de comparaison équivalents donnent une idée du rapport de leurs capacités électriques.

Cavendish serait ainsi parvenu à des résultats fort remarquables, par exemple :

« 1° Si dans un appartement sphérique de 16 pieds de diamètre on suspend un globe d'un diamètre de 1 pied, la charge de ce globe sera augmentée dans le rapport de 16 à 15, si l'on charge en sens contraire la surface environnante. » C'est la loi de distribution sur deux surfaces sphériques concentriques.

« 2° La capacité d'un disque circulaire est à la capacité d'une sphère de même rayon dans le rapport de 1 à 1,57. » Ce résultat est entièrement conforme à ce que donne le calcul (2).

Enfin, Cavendish a montré le premier (3) que, pour un même état électrique, la quantité d'électricité qu'une lame de verre garnie peut recevoir, est proportionnelle à la surface de la garniture et en raison inverse de l'épaisseur du verre.

340. Volta (4) employait, pour comparer les capacités électri-

(1) Harris, *Leçons d'électricité*, p. 159.
(2) Thomson, *Reprint of papers*, p. 180.
(3) *Phil. trans.*, t. LXVI, p. 196.
(4) *Collezione dell'opere*, t. I, part. II, p. 55.

ques de différents corps, à l'aide d'un électromètre gradué, une méthode presque identique à celle dont l'usage a été depuis généralisé et dont nous avons indiqué le principe (149).

De Saussure (1) décrit cette méthode dans les termes suivants, où il indique le moyen de faire des mesures absolues. « Il faudrait pour cela, dit-il, prendre pour termes de comparaison des boules de métal bien polies, suspendues en l'air par de simples cordons de soie. Une de ces boules non électrisée, mise en contact avec le corps dont on voudrait connaître la capacité, diminuerait la tension ou la force répulsive de ce corps; et la quantité dont ce contact aurait diminué cette force, donnerait le rapport de la capacité du corps avec celle de la boule... Il me semble que c'est d'après ces principes qu'il faudrait traiter l'*électrométrie*, si du moins l'on suppose, comme cela paraît assez bien prouvé, que la capacité des corps relativement au fluide électrique est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à leur surface. » Sauf l'erreur de fait contenue dans les derniers mots de cette citation, on voit qu'il reste peu de chose à ajouter pour compléter la description des expériences.

341. Pour comparer les potentiels d'un conducteur A successivement isolé, puis mis en communication avec un autre conducteur B, on peut, comme le faisait Faraday, déterminer, par un plan ou une boule d'épreuve, le rapport des densités électriques en un même point du corps A dans les deux cas; mais cette méthode ne comporte pas une grande précision.

Le plus souvent, on compare les potentiels par un électromètre, et alors il est nécessaire de tenir compte de la capacité de cet électromètre, laquelle n'est généralement pas négligeable. On peut prendre, d'ailleurs, comme terme de comparaison intermédiaire entre deux corps proposés, la capacité même de l'électromètre, capacité qu'il est facile d'augmenter à volonté, en maintenant l'appareil en communication avec un conducteur quelconque isolé.

La méthode ne présente pas de difficultés quand on se propose simplement de déterminer des rapports de capacités. Supposons, par exemple, que l'on emploie un électromètre comme celui de

(1) *Voyages dans les Alpes*, t. II, p. 179.

M. Thomson, dans lequel la déviation de l'aiguille mobile soit proportionnelle à son potentiel. Appelons C et C′ les capacités des deux corps A et B que l'on veut comparer, et C_1 la capacité de l'électromètre, soit seul soit réuni à un conducteur. On charge l'aiguille de l'électromètre d'une certaine quantité d'électricité, et on détermine la déviation δ_1 ; on met ensuite l'instrument en communication lointaine avec le corps A, et la déviation est réduite à δ; on a alors

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{C_1 + C}{C_1},$$

d'où l'on tire

$$\frac{C}{C_1} = \frac{\delta_1 - \delta}{\delta}.$$

On recommence la même expérience avec le corps B, et on obtient des déviations δ'_1 et δ' qui donnent

$$\frac{C'}{C_1} = \frac{\delta'_1 - \delta'}{\delta'}.$$

On en déduit

$$\frac{C}{C'} = \frac{\delta_1 - \delta}{\delta'_1 - \delta'} \cdot \frac{\delta'}{\delta}.$$

Il y a d'ailleurs différentes manières de disposer les expériences. Si l'on emploie une source à potentiel constant V comme une pile électrique, on peut, par exemple, opérer de telle façon que la capacité de l'électromètre n'intervienne pas. Le corps A mis en communication avec la source prend une quantité d'électricité égale à CV ; on le relie ensuite à l'aiguille de l'électromètre primitivement à l'état neutre et on obtient une déviation α. Après avoir chargé de nouveau le corps A avec la source, on l'isole, et on le met en communication avec le corps B ; il ne reste plus alors sur le premier corps qu'une fraction $\frac{C}{C+C'}$ de sa charge primitive ; on rompt cette communication et on relie le corps A à l'électromètre, ce qui donne une nouvelle déviation α'. Les déviations sont proportionnelles aux deux charges du corps A ; on a donc

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{C}{C+C'},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{C}{C'} = \frac{x'}{x - x'}.$$

Il en résulte l'équation de condition

$$\frac{x'}{x - x'} = \frac{\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_1' - \mathfrak{E}'} \cdot \frac{\mathfrak{E}'}{\mathfrak{E}},$$

laquelle servira de contrôle à l'exactitude des expériences.

Si les déviations de l'électromètre ne sont pas proportionnelles aux potentiels, on remplacera ces déviations par des nombres tirés d'une table de graduation. Il faut seulement s'assurer que la capacité de l'électromètre est sensiblement indépendante de la position de l'aiguille dans les limites où on l'emploie.

342. Pour déterminer en valeur absolue les capacités C et C', il est nécessaire d'avoir un corps de capacité connue. La première idée qui se présente est de choisir comme terme de comparaison une sphère dont la capacité est représentée par le même nombre que le rayon ; mais on rencontre là une difficulté capitale. Il est à peu près impossible de soustraire un conducteur formé par une seule surface, comme une sphère, à l'influence des corps étrangers, tels que les parois de la salle dans laquelle on opère et les objets de toute nature dont on est entouré. Cette cause d'erreur n'est jamais négligeable, et on ne peut l'éviter qu'en employant des conducteurs d'une forme plus complexe, comme des condensateurs à lame d'air sphériques, cylindriques ou à plateaux, pour lesquels on connaît l'expression de la capacité électrique.

343. Si l'on emploie un condensateur formé d'une sphère de rayon R_1, entourée par deux calottes analogues aux hémisphères de Magdebourg dont le rayon intérieur est R_2, on sait que la capacité de la sphère intérieure est alors $R_1 \frac{R_2}{R_2 - R_1}$. Il faut avoir soin seulement que les deux surfaces sphériques ne soient pas trop rapprochées pour que la différence $R_2 - R_1$ puisse être évaluée assez exactement, et que le défaut de centrage des deux surfaces n'ait pas trop d'influence. M. Angot, par exemple, s'est servi d'un condensateur sphérique dont les rayons

étaient, en millimètres,

$$R_1 = 39{,}5$$
$$R_2 = 62,$$

ce qui donnait, pour capacité de la sphère intérieure,

$$C_1 = 39{,}5 \frac{62}{62 - 39{,}5} = 109,$$

et quatre séries d'expériences différentes, par une méthode analogue à elle que nous avons indiquée, ont donné pour la capacité de l'électromètre les valeurs 433, 435, 429, 431, dont la moyenne est 432. Nous n'avons cité ces nombres que pour montrer combien ce genre de détermination comporte de précision.

344. **Capacité de deux sphères en contact.** — Si l'on veut déterminer la capacité d'un conducteur isolé, abstraction faite de toute influence extérieure, on rencontre les mêmes causes d'erreur que nous avons signalées à propos de l'emploi des sphères, et il est difficile de les éviter. M. Angot a essayé de vérifier les calculs de M. Plana (198) relatifs à la capacité de deux sphères en contact. Pour éliminer autant que possible l'influence des corps étrangers, il déterminait successivement la capacité apparente de la plus grosse sphère, puis la capacité apparente du système des deux sphères en contact. Le rapport des deux capacités apparentes doit être d'autant plus voisin du rapport des capacités réelles que la petite sphère est plus petite, car l'influence des corps étrangers sur le système entier ne diffère pas alors sensiblement de l'influence sur la grosse sphère seule. En calculant les capacités théoriques d'après les tables de M. Plana, il a obtenu les résultats suivants :

RAYONS DES SPHÈRES		CAPACITÉ	
a	*b*	OBSERVÉE	CALCULÉE
125mm	106mm	170mm	160,6
125	53	137	133,6
106	53	115	116,5
53	39,2	65,2	64,6

L'accord de l'observation avec le calcul est aussi satisfaisant qu'on peut l'espérer, par suite des causes d'erreur inhérentes à ce genre de déterminations.

345. **Capacité d'un cylindre droit à bases planes.** — M. Angot a déterminé aussi la capacité d'un cylindre circulaire droit terminé par des bases planes, et il a éliminé l'influence des corps étrangers par un artifice ingénieux. Pour cela, il déterminait la capacité apparente d'un cylindre en le suspendant par un fil de soie au milieu de la salle d'expériences et aussi loin que possible de tout corps extérieur ; puis il suspendait au même point une sphère d'égal volume à peu près, dont il déterminait de même la capacité apparente. Dans ces conditions, les capacités des deux conducteurs étaient modifiées à peu près également par l'influence des corps étrangers, et le rapport de leurs capacités apparentes était sensiblement égal au rapport des capacités réelles; on peut donc en déduire la capacité absolue du cylindre, puisque l'on connaît celle de la sphère.

On ne connaît pas l'expression théorique de la capacité d'un cylindre limité ; mais M. Angot a cherché une formule empirique dont la forme était indiquée par quelques considérations théoriques. Nous avons vu (174) que, si une couche électrique M est répandue uniformément sur un cylindre de longueur L supposée très-grande et de rayon R, le potentiel de cette couche en un point de l'axe est, à une constante près,

$$V = \frac{2M}{L} l \cdot \frac{1}{R},$$

de sorte que l'inverse de la capacité électrique serait, à une constante près,

$$\frac{1}{C} = \frac{2}{L} l \cdot \frac{1}{R}.$$

En remplaçant dans ces expressions la fraction $\frac{1}{R}$ par $\frac{L}{R}$, nous satisferons à la condition générale que le rapport des capacités de deux conducteurs semblables soit égal au rapport des dimensions homologues, de sorte que l'on aura

$$V = \frac{2M}{L} l \cdot \frac{L}{R},$$

équation que l'on peut trouver d'ailleurs en évaluant directement le potentiel. La capacité électrique sera donc

$$C = \frac{L}{2l \cdot \frac{L}{R}}.$$

D'autre part, la capacité d'un disque circulaire de rayon R, considéré comme limite d'un ellipsoïde de révolution infiniment aplati, est égale à $\frac{2R}{\pi}$. On peut donc essayer de représenter la capacité d'un cylindre à bases planes par la formule

$$C = \frac{2R}{\pi} + \frac{L}{2l \cdot \left(A + \frac{L}{R}\right)},$$

dans laquelle A sera une constante à déterminer par expérience. En remplaçant cette constante par 4, on obtient des valeurs qui présentent un accord suffisant avec les résultats de l'expérience, au moins pour les cylindres employés, comme on le voit dans le tableau suivant :

DIMENSIONS DU CYLINDRE			CAPACITÉ	
L	R	$\frac{L}{R}$	OBSERVÉE	CALCULÉE
50mm	50mm	1	46,6	47,3
100	»	2	59,2	59,7
200	»	4	79,4	79,9
400	»	8	113,8	112,5
700	»	14	151,6	152,9
800	»	16	167,2	165,3
10	20,5	0,35	21,5	22,3
31	»	1,05	27,1	28,3
59	»	2	36,3	35,2
104	»	3,52	45,0	44,6
118	»	4	46,5	47,1
209	»	7,08	64,5	62,2
236	»	8	68,5	66,2
100	100	1	94,4	94,6

346. **Capacité d'un condensateur à lame d'air.** — D'après la

théorie, la capacité d'un condensateur à plateaux, séparés par une lame d'air (178), doit être en raison inverse de la distance des deux armatures, lorsque cette distance est suffisamment petite par rapport au diamètre des plateaux ; cette capacité est égale à

$$C = \frac{S}{4\pi e} = \frac{\pi R^2}{4\pi e} = \frac{R^2}{4e},$$

R étant le rayon du plateau collecteur, de sorte que le produit de la capacité du collecteur par la distance des plateaux serait égal à $\frac{R^2}{4}$.

Cette relation ne s'est pas trouvée exactement vérifiée dans les expériences de M. Angot, ce qui indique que les conditions que suppose le calcul n'étaient pas suffisamment réalisées. Les condensateurs étant formés par des plateaux métalliques, séparés par trois cales en verres dont on déterminait l'épaisseur au sphéromètre et dont les dimensions étaient assez petites pour qu'on n'eût pas à se préoccuper de leur présence. M. Angot a employé deux paires de plateaux dont les rayons étaient respectivement 91,5 et 49 millimètres. Les capacités et les épaisseurs dans le tableau qui suit sont exprimées en millimètres.

R = 91,5			R = 49		
e	C	$e(C-68)$	e	C	$e(C-40)$
0,814	2900	2305	1,805	452	745
1,104	2170	2521	2,781	309	747
1,803	1550	2512	5,543	254	758
2,781	928	2592	7,086	149	771
3,549	758	2574	10,63	112	765
7,086	405	2375	12,54	100	752
10,63	290	2360			
12,54	262	2433			
24,21	187	2871			

Les résultats des expériences sont représentés sensiblement, pour ces deux systèmes de plateaux, par les formules

$$e(C-68) = 2375,$$
$$e(C-40) = 756.$$

Les nombres de la première série d'expériences qui correspondent à des distances très-petites ou très-grandes entre les plateaux ne s'accordent pas aussi bien avec la formule; mais alors le rapport des capacités du plateau et de l'électromètre était trop grand ou trop petit pour que les mesures pussent être faites avec précision.

On peut dire qu'entre les limites des expériences, c'est-à-dire tant que la distance des plateaux n'est pas supérieure au quart de leur rayon, la capacité du collecteur *croît* en raison inverse de l'épaisseur de la couche isolante.

Si l'on admet que cette formule soit encore applicable pour des plateaux très-écartés, on voit que les nombres 68 et 40 représenteront les capacités des collecteurs seuls. D'autre part, quand les plateaux sont très-rapprochés, le terme de correction est négligeable et la capacité du collecteur est sensiblement en raison inverse de la distance des plateaux, comme l'indique la théorie.

347. **Emploi des condensateurs à capacités variables.** — Le meilleur moyen pour comparer des capacités électriques consisterait à avoir recours à un conducteur de capacité variable que l'on modifierait d'une manière continue jusqu'à ce qu'elle fût égale à celle du corps à étudier; c'est le procédé de Cavendish. On pourrait employer pour cela, soit un cylindre formé de disques que l'on empilerait les uns sur les autres, de manière à augmenter la hauteur à volonté, soit plutôt un condensateur à plateaux dont on ferait varier la distance. Des formules empiriques, analogues à celles de M. Angot, permettraient de connaître dans chaque cas la capacité du corps de comparaison. Pour vérifier si les capacités de deux corps sont égales, il suffirait de constater qu'ils enlèvent une même quantité d'électricité à un corps électrisé, comme une bouteille de Leyde, ou bien qu'en les chargeant d'électricités contraires au même potentiel par les deux pôles d'une même pile et les réunissant ensuite, ils reviennent exactement à l'état neutre. On pourrait ainsi se mettre d'une manière complète à l'abri de la déperdition, que l'on n'évite pas dans les méthodes ordinaires, puisque l'on est toujours obligé de comparer les potentiels produits sur deux conducteurs différents par une même charge.

MM. Gibson et Barklay (1), par exemple, ont employé pour cela un condensateur glissant, formé de deux plateaux que l'on fait empiéter l'un sur l'autre d'une quantité variable.

348. **Emploi des appareils à décharges.** — On peut encore comparer les capacités électriques à l'aide des appareils à décharges, comme la bouteille de Lane et l'électroscope jauge. La capacité d'une batterie, par exemple, est proportionnelle au nombre des étincelles de la bouteille de Lane nécessaires pour amener cette batterie à un certain potentiel, ou pour produire une étincelle entre deux boules à une distance donnée.

L'électroscope jauge permet d'opérer avec des potentiels plus faibles et l'on pourra disposer les expériences de la manière suivante. Un conducteur A est porté à un certain potentiel, par exemple en le mettant en communication avec une batterie électrisée de très-grande capacité; on relie ensuite ce corps à un électroscope jauge et on compte le nombre n des décharges; on électrise de nouveau le conducteur A au même potentiel, on le met ensuite en communication avec un autre conducteur B, puis on supprime cette communication et on relie le premier à l'électroscope, ce qui donne un nombre n' de décharges. Les deux corps A et B, communiquant entre eux, se sont partagés la charge primitive proportionnellement à leurs capacités électriques C et C'; les deux charges jaugées sont donc dans le rapport de 1 à $\frac{C+C'}{C}$, ce qui donne

$$\frac{n}{n'} = \frac{C+C'}{C},$$

équation d'où l'on déduit le rapport $\frac{C}{C'}$ des capacités électriques.

DES CONDENSATEURS A AIR.

349. **Détermination de la force condensante des condensateurs.** — Pour connaître la force condensante d'un condensateur, on peut, comme nous l'avons vu (157), déterminer le rapport

(1) *Phil. Mag.* 4e série, t. XLI, p. 545.

des charges du collecteur maintenu en communication avec une source à potentiel constant, ou le rapport des capacités électriques, ou encore le rapport des potentiels de ce collecteur pour une même charge; ce qui donne lieu à trois méthodes différentes.

Nous n'ajouterons rien au sujet des deux dernières méthodes, qui, en fait, conduisent exactement aux mêmes expériences. Si l'on veut appliquer la première, on charge, par exemple, le collecteur seul avec la source, puis, après l'avoir isolé, on détermine par le plan d'épreuve la densité en un point P. On charge ensuite ce collecteur en présence du condenseur avec la même source; puis on supprime la communication du collecteur avec la source, on éloigne le condenseur et on détermine la densité au même point P. Comme le collecteur est supposé soustrait à toute influence au moment où on le touche par le plan d'épreuve, le rapport des densités obtenu est égal au rapport des charges totales du collecteur dans les deux cas et, par suite, à la force condensante.

Cette expérience présenterait quelques difficultés. Il faudrait être assuré d'abord que le potentiel de la source est resté le même dans les deux expériences; en second lieu, comme la force condensante est en général une quantité très-grande, il arrivera ou que la densité, dans le premier cas, sera trop faible et ne pourra être déterminée avec une exactitude suffisante, ou que, la densité dans le second cas étant très-grande, la déperdition sera très-rapide, ce qui conduira à un nombre trop faible pour la force condensante.

Toutefois ces méthodes exactes n'ont presque jamais été employées. Nous avons déjà cité (264) l'expérience par laquelle Volta a déterminé la force condensante de son électroscope condensateur; mais, en général, les physiciens qui se sont occupés de ce sujet ont été guidés par des considérations théoriques inexactes et leurs expériences, étant basées sur des méthodes imparfaites, ne donnent que des indications approchées, sans pouvoir servir de contrôle à la théorie. Nous allons néanmoins examiner ces expériences avec soin, et nous en trouverons quelques-unes qui sont tout à fait dignes d'attention.

350. **Théorie de Biot.** — Le point de départ des recherches expérimentales a été le plus souvent un calcul inexact de la

force condensante, établi par Biot sur l'hypothèse des électricités dissimulées ou latentes (1).

Nous avons vu (126) quelle est la loi suivant laquelle diminuent les quantités d'électricité sur les armatures d'un condensateur, comme l'appareil d'Œpinus à plateaux, dans le cas de décharges alternatives. Si le collecteur prend une quantité d'électricité égale à a, le condenseur se charge d'une quantité plus faible $b = ma$ d'électricité contraire; les charges enlevées sur les plateaux par des contacts alternatifs, ainsi que les résidus sur ces plateaux, varient comme les termes d'une progression géométrique dont la raison est m^2.

On peut déterminer aisément la valeur du coefficient m. Pour cela, une fois le condensateur chargé, on supprime les communications, on sépare les plateaux de manière à les soustraire à leur influence réciproque et l'on détermine, par le plan d'épreuve, le rapport des densités en deux points symétriquement placés sur les plateaux B et A; ce rapport est égal à celui des charges et, par suite, au coefficient m.

Comme les densités que l'on veut comparer sont alors des signes contraires, ce qui exige que l'on électrise chaque fois la boule mobile de la balance avec le plan d'épreuve lui-même, il vaut mieux opérer autrement. Après avoir déterminé la densité en un point P du plateau A, on reconstitue le condensateur, on isole le condenseur B, puis on touche le plateau A et, supprimant les communications, on éloigne de nouveau les armatures. La charge qui reste sur le plateau A est alors égale à am^2, de sorte qu'en déterminant la densité au même point P, on aura par le rapport des deux densités la valeur de m^2.

Le coefficient m étant en général très-voisin de l'unité, il y aura encore avantage à comparer la densité primitive au point P avec celle qui y restera après un certain nombre de contacts alternatifs. Si l'on a mis p fois le plateau A en communication avec le sol, la charge de ce plateau sera réduite à am^{2p}, et l'on obtiendra, par le rapport des densités, la valeur de m^{2p}, très-différente cette fois de l'unité, ce qui permettra de calculer m avec une grande approximation.

(1) *Traité de physique expérimentale*, t. II, p. 564.

351. D'après la théorie des électricités dissimulées (123), le plateau collecteur chargé d'une quantité d'électricité a, neutralise ou dissimule sur le condenseur B une quantité $b = ma$ d'électricité contraire. Celle-ci, réagissant à son tour sur le collecteur, dissimule une quantité d'électricité égale à mb ou m^2a, de sorte que l'électricité *libre* du collecteur est égale à $a - m^2a = a(1-m^2)$. Si l'on admet que cette électricité libre est précisément égale à celle que recevrait le collecteur s'il était relié à la même source et soustrait à l'influence du condenseur, on voit que la force condensante sera

$$\mathfrak{F} = \frac{a}{a(1-m^2)} = \frac{1}{1-m^2}.$$

Même en restant dans cet ordre d'idées, il est facile de montrer que le raisonnement est inexact, parce que la distribution de l'électricité n'est pas la même sur les deux plateaux. Quand le collecteur communique avec la source, la couche électrique du condenseur B est concentrée en totalité sur la face interne de ce plateau, et dissimule sur le collecteur une quantité d'électricité supérieure à mb, c'est-à-dire supérieure à m^2a; l'électricité libre a' du collecteur est donc inférieure à $a(1-m^2)$. Comme cette électricité libre fait équilibre à la source, elle représente la charge que prendrait le collecteur supposé seul, de sorte que la force condensante est

$$\mathfrak{F} = \frac{a}{a'} > \frac{a}{a(1-m^2)}.$$

Ainsi l'expression $\frac{1}{1-m^2}$ peut sans doute donner une idée approchée de la force condensante, mais elle ne lui est pas égale, comme on l'a dit souvent. La différence peut être très-grande lorsque les armatures sont très-rapprochées, mais elle est faible quand les plateaux sont très-éloignés; dans ce cas, en effet, le changement de distribution sur le plateau B ne modifie pas d'une manière sensible la quantité d'électricité dissimulée sur le collecteur A.

352. **Expériences de M. Riess.** — M. Riess a fait à ce sujet des expériences nombreuses (1). Son appareil à condensation se com-

(1) *Reibungselektricität*, bd. I, p. 307. — *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. XLII, p. 376.

pose de deux disques métalliques circulaires A et B, très-minces, à bords arrondis (fig. 156), munis de deux tiges cylindriques A′ et B′ supportées par des pieds en verre. Le plateau A peut tourner autour d'une charnière K, le plateau B peut être rapproché ou écarté du premier à l'aide d'une glissière dont le déplacement est indiqué par un vernis V. Cette glissière vient buter contre un arrêt H qui permet d'amener rapidement les plateaux à la même distance dans différentes expériences. Le plateau A porte encore une boule conductrice *a* à l'extrémité d'un fil métallique *f*, et le

Fig. 156.

plateau B est mis en parfaite communication avec le sol au moyen d'un fil métallique relié aux tuyaux de conduite de gaz et maintenu en B′ par une vis de pression.

Les dimensions de l'appareil de M. Riess étaient les suivantes :

Plateaux.	Diamètre.	$81^{l},6 = 184^{mm}$.
	Épaisseur.	$17/24^{l} = 1,6$
Cylindres A′ et B′. .	Longueur.	$14^{l}\,3/8 = 35$
	Diamètre.	$11^{l}\,7/24 = 25,5$
Fil *f*	Longueur. . . .	$101^{l} = 228$
	Diamètre.	$5/6^{l} = 1,1$
Boule *a*.	Diamètre. . . .	$7^{l} = 16$

353. *Comparaison des densités.* — M. Riess a déterminé d'abord le changement de densité sur le collecteur sous l'influence du condenseur. Cette méthode revient à peu près à la détermination des potentiels, mais dans des conditions qui ne sont pas absolument rigoureuses. On charge le plateau A avec une bouteille de Leyde, le plateau B étant éloigné, et on touche la sphère a avec une boule d'épreuve β de 2 lignes ou $4^{mm},5$ de diamètre. On approche ensuite le plateau B à la distance voulue et on touche le même point sur a avec une seconde boule d'épreuve β' identique à la première. Ces deux boules, portées dans la balance à la manière ordinaire, donnent des torsions T et T' dont le rapport est égal à celui des densités électriques au même point dans les deux expériences.

M. Riess montre d'abord que ce rapport est indépendant de la charge primitive, ce qui doit être, la distribution de l'électricité ayant lieu dans tous les cas suivant la même loi.

M. Riess donne ensuite ce rapport comme représentant la force condensante, ce qui n'est pas exact. Supposons en effet que les expériences aient été faites dans l'ordre inverse : le plateau A, communiquant avec une source, se charge sous l'influence du condenseur et on détermine la densité μ au point a; supprimant ensuite les communications, on éloigne le condenseur B, la charge du plateau A se distribue régulièrement et on détermine la densité nouvelle μ' au même point a. Le rapport $\frac{\mu'}{\mu}$ sera la force condensante, s'il est démontré que la densité μ est la même que si le plateau A est mis seul en communication avec la source, sans être soumis à l'influence du condenseur B. Cela peut être sensiblement exact dans certains cas, mais non d'une manière générale; il est clair, en effet, que la densité électrique sur la face extérieure du plateau A, dans le voisinage du bord, est plus grande que si le plateau condenseur n'existait pas, et rien n'indique jusqu'à quelle distance du bord il faut s'éloigner pour que l'hypothèse puisse être admise. On voit même que la densité μ sera en général trop grande et, par suite, que l'expérience donnera des nombres trop petits pour la force condensante.

Si le fil f qui relie la boule a au collecteur était suffisamment

long et fin, la méthode serait irréprochable; le potentiel sur cette boule ne dépendrait sensiblement que de la charge qu'elle possède et serait proportionnel à la densité électrique. Le rapport des densités donnerait donc exactement la force condensante.

354. La première série du tableau (page 462), donne les résultats obtenus par M. Riess. Si la force condensante, supposée égale au rapport $\frac{T}{T'}$, était en raison inverse de la distance e des plateaux ou de l'épaisseur de la couche isolante, le produit $\frac{T}{T'} \cdot \frac{1}{e} = p$ serait constant. On a inscrit les valeurs du rapport $\frac{T'}{T}$ et du produit p, ces derniers nombres étant multipliés par 1000 pour simplifier l'écriture.

355. Dans une deuxième série d'expériences, le fil f a été remplacé par un autre fil plus court et la boule a par une autre plus petite. Les dimensions nouvelles étaient

Fil f	Longueur.	$5^{l},5 = 8^{mm}$.
a.	Diamètre.	$4^{l},5 = 10^{mm}$.

On voit, d'après le tableau, que les forces condensantes sont cette fois un peu plus grandes, surtout dans le cas de petites distances. Il n'y a aucune conséquence à en tirer, parce que les deux séries ne sont pas comparables entre elles, à cause du changement de forme que l'appareil a subi, surtout dans le voisinage du point où les densités ont été déterminées.

356. Dans les expériences de la troisième série, le rapport des densités a été pris sur le bord du plateau collecteur. On voit que les valeurs de la force condensante, déduites du rapport des densités, sont notablement plus faibles, en particulier pour les plus petites distances, ce qui est parfaitement conforme à ce que l'on pouvait prévoir. M. Riess conclut de cette circonstance que, si le plateau collecteur A était mis en communication avec une source électrique par son bord, ce qui arrive souvent dans l'électroscope condensateur, la valeur de la force condensante, et par suite la charge que prendrait l'appareil, serait notablement plus faible que lorsque la communication a lieu par le

milieu du plateau. C'est là une conséquence que rien ne semble justifier.

357. La quatrième série d'expériences avait pour but de déterminer l'influence de la grandeur des armatures. Le nouvel appareil avait les dimensions suivantes :

Plateaux.	Largeur.	$52^l = 117^{mm}$.
	Épaisseur.	$17/24^l = 1,6$
Cylindres A′ et B′. .	Longueur.	$11^l 3/4 = 26$
	Diamètre.	$6^l 5/24 = 14,6$

On déterminait les densités à l'extrémité du cylindre A′.

La force condensante s'est trouvée notablement plus faible que dans la seconde série, et il est probable, en effet, que la force condensante diminue, pour une distance donnée, à mesure que les dimensions des plateaux diminuent; mais on ne peut rien conclure de certain de ces expériences, la diminution observée paraît trop grande pour qu'on puisse l'attribuer uniquement au rétrécissement des plateaux, et il est probable qu'elle doit être, en grande partie, expliquée par cette circonstance que le rapport des densités était déterminé en un point beaucoup plus rapproché du condenseur.

358. Dans les expériences de la cinquième série, on a opéré avec le petit appareil, et le fil de communication du condenseur avec le sol a été disposé parallèlement à la surface du plateau, au lieu d'être normal comme pour la série précédente; on a obtenu ainsi des forces condensantes un peu plus grandes. Ce résultat serait facile à prévoir si le fil de communication avait des dimensions notables, parce que l'introduction de ce fil augmenterait l'influence du condenseur B sur le collecteur et produirait le même effet qu'un accroissement de surface du plateau B. Il paraît néanmoins difficile d'admettre que l'addition d'un simple fil parallèlement au plateau condenseur et situé derrière lui, puisse augmenter d'un cinquième la force condensante, comme cela a lieu pour les expériences à petite distance.

La seule conclusion à tirer de ces expériences de M. Riess, est que la méthode est incorrecte, puisqu'elle donne des résultats qui dépendent de la position des points touchés par les boules

d'épreuve. Les valeurs de p montrent aussi que, pour de petites distances, la force condensante ainsi calculée est à peu près en raison inverse de la distance des plateaux, mais il est impossible d'apprécier le degré d'exactitude de cette loi.

DISTANCE DES PLATEAUX	1re SÉRIE		2e SÉRIE		3e SÉRIE	
	$\frac{T'}{T} = \frac{1}{\mathcal{F}}$	1000 p.	$\frac{1}{\mathcal{F}}$	1000 p.	$\frac{1}{\mathcal{F}}$	1000 p.
∞	1	0	1	0	1	0
50 lig.	0,897	17,9	0,888	17,7	0,941	18,8
20	0,683	34,1	0,688	34,4	0,828	41,4
15	0,595	39,7	0,650	42	0,731	48,8
10	0,492	49,2	0,488	48,8	0,617	61,7
5	0,335	67	0,306	61,2	0,460	92,0
4	0,286	71,5	0,274	68,5	0,412	103
3	0,235	78	0,219	73	0,341	114
2	0,173	86	0,155	78	0,260	130

DISTANCE DES PLATEAUX	4e SÉRIE			5e SÉRIE		
	2e SÉRIE	$\frac{1}{\mathcal{F}}$	1000 p.	$\frac{1}{\mathcal{F}}$	1000 p	$\left(\frac{1}{\mathcal{F}}\right)_4 - \left(\frac{1}{\mathcal{F}}\right)_5$
15 lig.	0,650	0,768	51,2	»	»	»
10	0,488	0,688	68,8	0,597	59,7	0,091
8	»	0,590	73,7	»	»	»
6	»	0,496	82,6	»	»	»
5	0,306	0,443	88,6	0,408	81,0	0,035
4	0,274	0,393	98,2	0,340	85	0,053
3	0,219	0,330	110	0,269	89,6	0,061
2	0,155	0,252	116	0,190	95,0	0,042

359. *Mesure du rapport des charges des armatures.* — M. Riess a cherché ensuite à évaluer la charge du collecteur à l'aide du coefficient m, et il a déterminé ce coefficient par la méthode suivante. Le plateau A étant chargé, isolé et soustrait à toute influence, on touche un point M avec le plan d'épreuve et on obtient une certaine torsion T dans la balance. Cette torsion est

proportionnelle à la densité du point touché et à la charge totale a du plateau; on peut écrire

$$T = Ka,$$

K étant un coefficient inconnu.

On approche ensuite, à la distance voulue, le plateau B communiquant avec le sol; ce plateau prendra une charge d'électricité contraire égale à $-b$, et l'on a $b = ma$.

On isole le condenseur B et on le relie au collecteur par un fil conducteur très-court, afin de pouvoir négliger l'électricité que prend ce fil; la charge totale de l'ensemble des deux plateaux est alors $a - b$. On touche par le plan d'épreuve un point quelconque N de l'un des plateaux et l'on obtient dans la balance une torsion T'. Cette torsion est proportionnelle à la charge totale et l'on peut écrire

$$T' = K'(a - b) = K'a(1 - m),$$

le coefficient K' ayant une autre valeur que précédemment.

On déduit de là

$$\frac{T}{T'} = \frac{K}{K'} \cdot \frac{1}{1 - m},$$

d'où

$$m = 1 - \frac{K}{K'} \cdot \frac{T'}{T}.$$

Pour déterminer le rapport $\frac{K}{K'}$, on recommence les mêmes expériences, en ayant soin que le condenseur B reste isolé quand on l'approche du collecteur; la charge qu'il prendra alors par influence sera nulle. Si l'on désigne par a_1 la charge primitive du plateau A, T_1 et T'_1 les torsions qui correspondent aux densités des deux points M et N, on aura encore

$$T_1 = Ka_1,$$
$$T'_1 = K'a_1.$$

On en déduit

$$\frac{K}{K'} = \frac{T_1}{T'_1},$$

et enfin

$$m = 1 - \frac{T_1}{T'_1} \cdot \frac{T'}{T}.$$

360. Cette manière de déterminer le coefficient m est exacte, quoiqu'un peu compliquée. M. Riess en déduit la force condensante par la formule habituelle $\frac{1}{1-m^2}$. Les nombres ainsi obtenus sont en général un peu inférieurs à ceux qui ont été déduits du rapport des densités. Comme les deux méthodes donnent des résultats trop faibles, on peut en conclure que la détermination du rapport des densités conduit à des nombres plus voisins de la vérité, que la mesure du coefficient m et le calcul des électricités dissimulées.

Le premier tableau de la sixième série a été obtenu avec la même disposition expérimentale que pour la première série, et on a placé dans la troisième colonne la différence des résultats fournis par les deux méthodes.

Le second tableau correspond à la disposition expérimentale employée pour la seconde série, et la troisième colonne renferme aussi la différence des résultats.

On peut remarquer qu'il y a une certaine irrégularité dans la marche de ces différences, ce qui indique que les expériences ne comportaient pas une grande précision.

6e SÉRIE.

DISTANCE DES PLATEAUX	DISPOSITION DE LA 1re SÉRIE			DISPOSITION DE LA 2e SÉRIE		
	m	$1-m^2$	$(1-m^2)-\frac{1}{3}$	m	$1-m^2$	$(1-m^2)-\frac{1}{3}$
50 lig.	0,251	0,963	0,066	0,265	0,931	0,045
20	0,454	0,795	0,110	0,500	0,750	0,062
15	0,534	0,715	0,120	0,612	0,626	— 0,004
10	0,638	0,593	0,101	0,689	0,525	0,037
5	0,765	0,415	0,080	0,823	0,323	0,017
4	»	»	»	0,854	0,271	— 0,005
3	0,840	0,295	0,060	0,887	0,213	— 0,006
2	»	»	»	0,911	0,171	0,016

361. *Comparaison des distances explosives.* — M. Riess a employé encore une dernière méthode, basée sur la mesure des distances explosibles. Il s'est servi pour cela d'un *micromètre à étincelles*, dont l'une des boules A′ est mise en communication, par un fil conducteur, avec le collecteur A d'un condensateur à plateaux, et dont l'autre boule B′, qui communique avec le sol par les tuyaux de gaz, peut être rapprochée ou écartée de la première au moyen d'une vis micrométrique.

Le collecteur A étant touché par le bouton d'une bouteille de Leyde, prend une partie de la charge de cette bouteille, fraction qui, dans les expériences dont nous parlons, a été évaluée à 14 millièmes. Cela fait, on approche peu à peu la boule B′, à l'aide de la vis micrométrique, jusqu'à ce qu'une étincelle se produise entre les deux boules, et on note la distance Δ_1 qui les sépare.

On charge de nouveau le collecteur A par la bouteille de Leyde, puis on en approche le condenseur B, maintenu en communication avec le sol. La boule A′ est alors beaucoup moins chargée et l'explosion ne se produit que si on rapproche la boule B′ à une distance plus faible δ_1.

Pour se mettre à l'abri de la perte d'électricité que la bouteille de Leyde éprouve par ces contacts successifs, on recommence la première expérience, et l'on obtient une nouvelle distance explosive Δ_2. On pourrait de même recommencer la seconde, qui donnerait une distance δ_2... etc.

Le rapport $\frac{\delta}{\Delta}$ des distances explosives que l'on aurait observées, s'il n'y avait pas eu de déperdition, est alors

$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{\delta_1}{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}} = \frac{\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}}{\Delta_2} = \ldots.$$

362. C'est ainsi qu'ont été faites les expériences de la 7e série, la boule A′ étant reliée au cylindre du collecteur par un fil de cuivre de $8^p\,5^l$ de longueur et $\frac{1}{2}$ ligne d'épaisseur. Dans la 8e série, le fil de communication avait une longueur de $18^p\,5^l$.

On voit, par la deuxième colonne de la 7e série, que le rapport $\frac{\delta}{\Delta}$ ne peut être considéré comme sensiblement proportionnel à la distance des plateaux, que lorsque ces derniers sont très-rapprochés.

DISTANCE DES PLATEAUX	7e SÉRIE		8e SÉRIE	9e SÉRIE
	$\frac{\delta}{\Delta}$	$1000\,\frac{1}{e}\cdot\frac{\delta}{\Delta}$	$\frac{\delta}{\Delta}$	$\frac{\delta}{\Delta}$
50 lig.	0,914	18,3	»	0,900
30	0,794	26,5	»	0,747
20	0,687	34,4	0,697	0,658
10	0,451	45,1	0,486	0,429
5	0,272	54,4	0,279	»
2	0,105	52,5	»	»

Enfin, dans la 9e série d'expériences, on a chargé d'abord le collecteur seul et déterminé la distance explosive δ; puis on a chargé le même collecteur en présence du condenseur et, après avoir éloigné le condenseur, on a mesuré la nouvelle distance explosive. Si l'on peut admettre comme démontré que la distance explosive, entre un conducteur électrisé et un autre qui communique avec le sol, est proportionnelle à la charge électrique ou au potentiel de ce conducteur, la dernière méthode donnera exactement la mesure de la force condensante. Il ne resterait aucune objection à faire à cette dernière série d'expériences, si M. Riess, au lieu de déterminer le rapport des distances explosives, avait déterminé le rapport des densités.

En résumé, on ne peut pas considérer ces différentes méthodes de M. Riess, la mesure du rapport des densités, la détermination du coefficient m et celle du rapport des distances explosives, comme propres à déterminer la force condensante, parce que les résultats obtenus dans les trois cas présentent entre eux de grandes différences, comme on le voit dans les tableaux, où nous n'avons rapporté cependant que les moyennes des expériences. Ainsi, pour la distance de 2 lignes, la 7e série donne 0,105, tandis que la 4e donne un nombre plus que double,

0,232. Aucune de ces méthodes, d'ailleurs, ne repose sur un principe bien rigoureux.

363. **Expériences de M. Gaugain.** — Le grand travail entrepris par M. Gaugain (1), sur les relations qui rattachent la théorie de la distribution statique de l'électricité à la théorie de la propagation des courants, renferme des expériences fort remarquables au point de vue des condensateurs. Nous verrons plus loin que les lois qui régissent la propagation de l'électricité, au moins dans l'état permanent, sont les mêmes que celles de la propagation de la chaleur dans les corps conducteurs. Les relations qui ont été établies précédemment entre les forces électrostatiques et les flux de chaleur, existent donc aussi entre ces mêmes forces et les courants électriques. Les recherches de M. Gaugain, envisagées à un point de vue différent de celui où il s'est placé, peuvent donc servir à vérifier les calculs d'électricité statique.

364. M. Gaugain cherche d'abord à se procurer une source à tension constante, c'est-à-dire à potentiel constant. Il prend pour cela un condensateur à plateaux C, qu'il met en communication avec un électroscope à feuilles d'or. Cet électroscope est entouré d'une cage en verre à parois planes, dont l'une des faces verticales porte des divisions. En visant par un trou percé dans un écran à une certaine distance, on voit sur quelle division se projettent les feuilles d'or, et l'on charge ce condensateur, dans les différentes expériences, de façon que la divergence des feuilles soit toujours la même. On voit par là que M. Gaugain n'opère qu'avec des potentiels très-faibles, parce que son appareil de mesure est extrêmement délicat ; les causes d'erreur dues à la déperdition sont ainsi presque annulées. Ce grand condensateur peut avoir une charge relativement considérable pour un potentiel très-faible, de façon que les autres corps, avec lesquels on le met en relation, ne prennent qu'une fraction insignifiante de l'électricité qu'il possède et ne font pas baisser le potentiel d'une manière appréciable.

365. L'appareil de mesure est l'*électroscope jauge* ou *électroscope à décharges* (317), et la marche des expériences est très-simple, puisque l'on peut déterminer chaque fois, par le nombre

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXIV, p. 174.

des décharges de l'électroscope, en tenant compte des résidus si cela est nécessaire, la quantité totale d'électricité que possède un conducteur. Il faut avoir soin seulement de bien choisir la résistance du fil de coton qu'on interpose entre l'électroscope et le conducteur, afin que les décharges ne soient ni trop lentes ni trop rapides, qu'il y ait, par exemple, un intervalle de quelques secondes entre les premières décharges.

Remarquons encore qu'à la fin de l'expérience, quand la feuille d'or ne peut plus atteindre le potentiel qui lui permet de se décharger, il reste une certaine quantité d'électricité sur le conducteur, le fil de coton et l'électroscope. En général, il n'est pas nécessaire de s'occuper de l'électricité qui reste sur le conducteur lui-même. En effet, si l'on appelle V le potentiel initial de ce conducteur et V_1 le potentiel qu'il conserve quand les décharges de l'électroscope cessent, ce conducteur n'a perdu en réalité que la quantité d'électricité nécessaire pour élever le potentiel de V_1 à V, ou, ce qui revient au même, pour porter le potentiel de zéro à $V - V_1$; les résultats sont donc les mêmes que si l'on effectuait la mesure complète pour une source à potentiel un peu moins élevé. Il est nécessaire seulement de déterminer le résidu de l'électroscope à la manière ordinaire.

M. Gaugain a étudié avec soin les condensateurs fermés, cylindriques ou sphériques, pour lesquels la théorie est beaucoup plus simple.

366. *Condensateurs cylindriques.* — Les condensateurs cylindriques étaient formés d'un tuyau de fer blanc, dans l'intérieur duquel se trouvait placé concentriquement un autre tuyau de fer blanc ou une tige de fer. Le tuyau extérieur avait généralement un mètre de longueur, et le tuyau intérieur, de longueur un peu moindre, était soutenu dans l'intérieur du premier à l'aide de supports en gomme laque.

M. Gaugain a d'abord effectué quelques expériences préliminaires, pour démontrer des propriétés générales à tous les condensateurs fermés. Il s'est servi, par exemple, d'un condensateur dont les dimensions étaient les suivantes :

Longueur des cylindres.	$L = 1$ mètre.
Diamètre du cylindre extérieur.	$2R_2 = 80^{mm}$.
Diamètre du cylindre interieur.	$2R_1 = 40^{mm}$.

L'appareil étant chargé à la manière ordinaire, on supprime toutes les communications soit avec la source, soit avec le sol, de manière à isoler les deux armatures; on réunit ensuite ces deux armatures au moyen d'une tige métallique pourvue d'un manche isolant. Après cette opération, si l'on explore les deux armatures avec un électroscope, on ne trouve d'électricité nulle part. Cette expérience, qui avait été réalisée déjà par Franklin avec une bouteille de Leyde, vérifie le théorème de Faraday.

367. On peut mettre directement en évidence, par la méthode des jaugeages, l'égalité des charges *influente* et *influencée*, lorsque le corps influent est complétement entouré par un conducteur communiquant avec le sol.

L'appareil ayant été électrisé en prenant le cylindre intérieur pour collecteur, on supprime la communication de la source avec l'armature intérieure et l'on réunit cette armature avec l'électroscope à décharges, ce qui donne la charge *influente*. Puis on charge le condensateur de la même manière et, après avoir supprimé les communications, on réunit l'armature intérieure avec le sol et l'armature extérieure avec l'électroscope à décharges. En opérant ainsi, M. Gaugain a obtenu, dans une expérience, 56 décharges avec l'armature intérieure et 46 seulement avec l'armature extérieure. Ces deux nombres ne sont pas égaux, parce que les résidus sur les deux armatures sont différents. En les déterminant à la manière ordinaire, on a trouvé 13 décharges pour le résidu du collecteur et 23 pour le condenseur. La valeur complète de la charge influente était donc $56 + 13 = 69$, et celle de la charge influencée $46 + 23 = 69$; ces deux sommes sont égales.

368. M. Gaugain énonce aussi les deux propositions suivantes :

1° *Quand le cylindre extérieur est collecteur, la charge influencée du cylindre intérieur est précisément égale à celle que prendrait ce dernier cylindre s'il devenait collecteur, la source restant la même dans les deux cas;*

2° *Quand le cylindre extérieur est collecteur, sa charge peut être considérée comme formée de deux parties : l'une qui est égale à la charge influencée du cylindre intérieur; l'autre qui représente la quantité d'électricité que prend le cylindre extérieur.*

lorsqu'il n'est soumis à aucune influence, ou, plus exactement, lorsqu'il est soumis à la seule influence de l'enceinte au milieu de laquelle on opère.

Ainsi, l'appareil étant électrisé à la manière ordinaire, on jauge la charge du cylindre intérieur, qui est collecteur, et on obtient 79 décharges de l'électroscope. On électrise de nouveau l'appareil en prenant l'armature extérieure pour collecteur, et jaugeant alors l'électricité de l'armature intérieure, on trouve encore 79 décharges. Il n'y a pas lieu de se préoccuper ici des quantités d'électricité qui échappent à la mesure, puisque les résidus sont les mêmes dans les deux cas : le premier théorème est donc démontré.

Le cylindre extérieur est mis en communication avec la source, l'armature intérieure restant isolée, et ce cylindre relié ensuite à l'électroscope donne alors 25 décharges. On répète la même expérience, en réunissant cette fois l'armature intérieure avec le sol, pendant que l'armature extérieure communique avec la source, et on obtient 106 décharges. Enfin, le condensateur étant électrisé de nouveau, on jauge la quantité d'électricité de l'armature intérieure, qui joue le rôle de condenseur, et on la trouve égale à 79 décharges. Les deux armatures étant amenées chaque fois, par l'électroscope, du potentiel V au potentiel V_1, il n'y a pas lieu de tenir compte des résidus de ces armatures, mais il faut évaluer celui de l'électroscope, qui était égal à 2 décharges. On obtient ainsi

Charge de l'armature extérieure seule..	$25 + 2 = 27$;
Charge de l'armature extérieure faisant fonction de collecteur.	$106 + 2 = 108$;
Charge influencée de l'armature intérieure.	$79 + 2 = 81$.

L'excès de la seconde charge sur la première est rigoureusement égal à la troisième.

369. Ces deux théorèmes sont des conséquences très-simples de la théorie.

Supposons qu'un conducteur A, communiquant avec le sol, soit complétement entouré par un conducteur B, porté à un potentiel positif V. Il se produit sur le conducteur A une certaine quantité d'électricité négative $-M$; une quantité égale $+M$ d'é-

lectricité positive est distribuée sur la surface interne du conducteur B, et une quantité + M′ est répandue sur sa surface extérieure. Les deux couches — M et + M ont un potentiel nul sur tout point extérieur et un potentiel constant — V (153 et 164) sur le conducteur A. D'autre part, la couche extérieure + M′ a, sur tous les points qu'elle renferme, un potentiel constant égal à + V. On voit que dans ces conditions l'équilibre existe, puisque le potentiel est constant et égal à V sur le conducteur extérieur B, et qu'il est égal à — V + V ou à zéro, sur le conducteur intérieur A.

Les deux couches intérieures — M et + M sont les mêmes, au signe près, que si le conducteur A eût été mis en communication avec une source au potentiel V, et le conducteur B en communication avec le sol ; c'est le premier théorème de M. Gaugain.

Enfin l'excès + M′ de la charge du conducteur extérieur B sur celle du conducteur intérieur A est égal à la charge que prendrait ce conducteur B si A restait isolé ou n'existait pas ; c'est le second théorème.

370. M. Gaugain a comparé ensuite les charges de condensateurs cylindriques de dimensions différentes. La formule

$$M = \frac{VL}{2l \cdot \frac{R_2}{R_1}},$$

qui donne (175) la quantité d'électricité répandue sur l'armature intérieure d'un condensateur cylindrique à surfaces concentriques, montre que, si le rapport des rayons des deux surfaces est constant, la charge du collecteur ne change pas pour un même potentiel.

Avec deux appareils de même longueur dont les rayons étaient 40^{mm} et 20^{mm} pour le premier, 80^{mm} et 40^{mm} pour le second, M. Gaugain a obtenu dans le premier cas 80 décharges, et dans le second 79,5, c'est-à-dire sensiblement le même nombre. Il n'y a pas encore lieu de faire de corrections pour les résidus, puisque les deux appareils ont passé du potentiel V au potentiel V_1, et que le résidu de l'électroscope était le même dans les deux expériences.

371. Voici encore quelques résultats relatifs à des appareils de même longueur.

DIAMÈTRE		$\frac{1}{2}$				
$2R_1$	$2R_2$					
		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		
		1		$\frac{1}{2}$		
		1		$\frac{1}{2}$		

Les rapports des rayons sont égaux à 2, 3, 5. La dernière colonne, qui donne le produit des charges totales respectivement par 1, 2 et 3, montre que la charge du collecteur est en raison inverse du logarithme du rapport des rayons, ce qui est conforme à la théorie.

372. M. Gangain a formé des condensateurs cylindriques excentriques à l'aide de deux tuyaux de fer blanc de 1 mètre de longueur ; les diamètres de ces tuyaux étaient de 10^{mm} et de 30^{mm}, et ils étaient placés l'un dans l'autre de manière que leurs axes fussent toujours parallèles.

Voici les résultats obtenus dans une série d'expériences :

DISTANCE DES AXES	CHARGE OBSERVÉE	CHARGE CALCULÉE	DIFFÉRENCE
0^{mm}	29	1000	»
17,5	33	1157	$+\frac{1}{115}$
20	33,5	1155	$-\frac{1}{85}$
23	36	1241	$-\frac{1}{125}$
25	38	1310	$-\frac{1}{66}$
27	45	1482	$+\frac{1}{494}$
30	50	1724	$-\frac{1}{345}$

M. Gaugain ignorait la loi du phénomène quand les expériences ont été faites, et il a comparé ensuite les résultats avec ceux de la théorie par une formule que lui avait indiquée M. Blavier.

La seconde colonne des charges observées renferme des nombres proportionnels à ceux de la première, calculés en prenant pour 1000 la charge du condensateur à surfaces concentriques. L'accord du calcul et de l'observation est aussi complet qu'on peut l'espérer.

373. *Condensateurs sphériques.* — Les condensateurs sphériques employés par M. Gaugain étaient formés d'une sphère soutenue par des pieds en gomme laque, dans l'intérieur de deux calottes hémisphériques. La calotte supérieure présentait une ouverture de 30 millimètres de diamètre, par laquelle on faisait passer des fils pour mettre la sphère intérieure en communication soit avec la source soit avec l'électroscope à décharges.

La sphère intérieure étant employée comme collecteur, sa charge est (152)

$$M = V\frac{R_1R_2}{R_1 - R_2} = \frac{V}{4}\cdot\frac{D_1D_2}{e},$$

en appelant D_1 et D_2 les diamètres des deux surfaces et e leur distance.

M. Gaugain a comparé, deux à deux, six condensateurs sphériques concentriques dont les armatures avaient les dimensions ci-après, évaluées en millimètres :

N° DU CONDENSATEUR	DIAMÈTRE	
	INTÉRIEUR	EXTÉRIEUR
1	61,5	89
2	»	118,5
3	»	161
4	90,5	118,5
5	»	161
6	120	161

Voici maintenant le résumé des expériences :

N^os DES CONDENSATEURS	CHARGES JAUGÉES	RAPPORT DES CHARGES		DIFFÉRENCE
		OBSERVÉ	CALCULÉ	
5 / 6	16 / 35	0,457	0,438	$+\frac{1}{22}$
3 / 6	7,5 / 35	0,214	0,211	$+\frac{1}{75}$
4 / 6	27 / 32,6	0,828	0,812	$+\frac{1}{50}$
1 / 6	13 / 30	0,433	0,424	$+\frac{1}{45}$
2 / 5	10 / 16,4	0,609	0,618	$-\frac{1}{75}$

Les différences sont tout à fait de l'ordre des erreurs d'observation.

374. *Condensateurs plans.* — Dans le cas des condensateurs plans, M. Gaugain a déterminé soit la charge du plateau collecteur seulement, soit le rapport des charges du collecteur et du condenseur. Les plateaux avaient 85^mm de diamètre, et ils étaient isolés par des pieds en gomme laque, dans l'intérieur d'une cavité cylindrique en métal non isolée, de 160^mm de diamètre et de 180^mm de hauteur. Ce cylindre avait pour but de constituer une enceinte artificielle à peu près fermée, qui éliminait l'influence des corps étrangers.

DISTANCE DES PLATEAUX e	INVERSE DE LA CHARGE DU COLLECTEUR $\frac{1}{a}$	$\frac{1}{ae}$
10^mm	10	1
20	15	0,75
30	17,77	0,59
40	18,82	0,47
50	20	0,40

DISTANCE DES PLATEAUX e	RAPPORT DES CHARGES DES DEUX PLATEAUX $\frac{a}{b}=\frac{1}{m}$	$\frac{1}{me}$
7,5	1,352	0,18
10	1,452	0,145
15,5	1,754	0,13
20	1,933	0,096
25,7	2,439	0,095
30	3	0,10

ı voit que ni la charge du collecteur ni le rapport des charges ɔnt en raison inverse de la distance des plateaux, à moins cette distance ne soit très-faible.

'5. Dans un autre mémoire (1), M. Gaugain est revenu sur la : condensante des condensateurs à plateaux; il cherche à ɔntrer que l'expression $\frac{1}{1-m^2}$ est exacte, ou, ce qui re- : au même, que le plateau collecteur, étant soustrait à l'in- ıce du condenseur et mis en communication avec la source, drait une charge égale à $a\,(1-m^2)$, a étant la charge de ce cteur quand il fait partie de l'appareil de condensation.

ɔus avons dit (351) pourquoi ce résultat doit être d'autant plus né de la vérité que les plateaux sont plus voisins; c'est donc ɔut pour les petites distances qu'il eût été intéressant d'en rôler l'exactitude. M. Gaugain dit l'avoir fait pour des pla- ĸ de toutes dimensions, et des distances variant de 5^{mm} à : mais il n'a rapporté malheureusement que l'expérience ınte, dans laquelle le diamètre des plateaux était de 130^{mm}, ır distance de 5 à 6^{mm}.

ɛlectroscope de l'appareil qui sert de source électrique mar- t 50°, on le mit en relation avec le collecteur A isolé et trait à toute influence; il ne marqua plus alors que 35°. La ge prise par ce collecteur est donc capable de porter de 35° ' la déviation de l'électroscope. On électrise le collecteur A, ıis à l'influence du condenseur B, jusqu'à ce que l'électro-

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. IV, p. 230.

scope marque 35° ; la charge du collecteur est a, celle du condenseur $-b$, et l'on a $b = ma$. On isole le condenseur B et on touche A ; il ne reste cette fois sur le collecteur que la charge

$$mb = m^2 a.$$

On isole le collecteur, on relie le condenseur avec le sol, on charge la source et l'électroscope jusqu'à ce que celui-ci marque 50°, et, faisant communiquer le collecteur A avec la source, on constate que la déviation de l'électroscope tombe encore à 35°. Comme la charge finale du collecteur est encore a et qu'il avait déjà am^2, il a donc pris une quantité égale à $a(1 - m^2)$, et l'expérience indique que le plateau collecteur soustrait à toute influence avait pris exactement la même charge.

Cette expérience est ingénieuse, mais elle ne suffit pas pour démontrer l'exactitude de la formule dans tous les cas.

376. **Etat variable des condensateurs.** — M. Gaugain a étudié encore [1]) la manière dont varie l'état électrique d'un appareil à condensation quand on met le condenseur en communication avec le sol par un conducteur médiocre, le collecteur restant en communication avec la source. Il suffit, pour cela, d'interposer l'électroscope à décharges entre le condenseur et le sol.

Supposons, pour fixer les idées, que la source donne de l'électricité positive. Au début, c'est-à-dire au moment ou l'on établit la communication du collecteur A avec la source, ce collecteur est au potentiel V; le condenseur B prend un potentiel plus faible, et, par suite de l'écoulement continu d'électricité par le fil de coton et l'électroscope jauge, le potentiel du condenseur diminue peu à peu jusqu'à une valeur limite insuffisante pour provoquer de nouvelles décharges, c'est-à-dire sensiblement nulle.

A chaque instant, le potentiel du condenseur est proportionnel à la quantité d'électricité qui reste à s'écouler pour qu'il y ait équilibre. En effet, supposons que l'on ajoute au condenseur B une quantité -2β d'électricité négative et au collecteur A une charge positive $+\alpha$, telles que le potentiel de ces deux couches soit égal à zéro sur A et à $-v$ sur B ; c'est précisément l'état électrique

[1]) *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. IV, p. 240.

qui s'établirait si le condenseur B isolé recevait une charge -2β, l'autre communiquant avec le sol. Il est clair que, dans ce cas, le potentiel v est proportionnel à β. En superposant cet état d'équilibre au premier, on aura l'équilibre qui convient au cas ou il se sera écoulé par l'électroscope une quantité d'électricité positive égale à $+\beta$, puisqu'il en résultera en même temps un excès $-\beta$ d'électricité négative ; on voit donc que la diminution $-v$ du potentiel du condenseur et l'accroissement de charge α du collecteur sont proportionnels à la quantité d'électricité écoulée β. Comme le potentiel devient nul à la fin, il en résulte que ce potentiel est à chaque instant proportionnel à la quantité qui devra s'écouler.

D'autre part, admettons que la vitesse du flux électrique par le fil de coton entre le condenseur et la feuille d'or soit proportionnelle à la différence des potentiels, c'est-à-dire au potentiel absolu du collecteur, on aura, en désignant par n la charge qui reste à une époque quelconque t, et k un coefficient constant,

$$\frac{-dn}{dt} = kn.$$

Appelant n_0 le flux total, on aura donc

$$n = n_0 e^{-kt}.$$

La charge initiale du collecteur étant m_0, l'accroissement de charge $m - m_0$ est proportionnel à la quantité d'électricité écoulée $n_0 - n$, ce qui donne

$$m - m_0 = h(n_0 - n) = hn_0(1 - e^{-kt}),$$

h étant un nouveau coefficient.

Il résulte de là que si l'on note, à des intervalles de temps égaux θ, les valeurs successives de n ($n_0, n_1, n_2, \ldots$), ces valeurs formeront une progression géométrique décroissante dont la raison est $e^{-k\theta}$. Les différences successives des valeurs de n ($n_0 - n_1$, $n_1 - n_2, \ldots$) forment également une progression géométrique dont la raison est la même ; enfin les quantités correspondantes $m_1 - m_0$, $m_2 - m_1, \ldots$ forment aussi une progression géométrique.

377. Pour vérifier cette propriété, il suffit de déterminer la

vitesse de production des décharges dans l'électroscope. L'expérience a été faite avec deux grands plateaux rectangulaires de 36 centimètres de largeur et 46 centimètres de longueur, séparés par une lame d'air de 12 millimètres, et l'on a noté de trois en trois minutes le nombre total des décharges.

TEMPS	DÉCHARGE TOTALE $n - n_0$	DÉCHARGES PENDANT TROIS MINUTES	CALCUL	DIFFÉRENCE
3′	24	24	24	0
6	45	21	25	0
9	62,5	17,5	62,5	— 0,2
12	76,8	14,3	76,5	— 0,3
15	88	11,2	88,2	+ 0,2
18	97,2	9,2	97,8	+ 0,6
21	105	7,8	105,7	+ 0,7
24	111,8	6,8	112,2	+ 0,4
27	117,8	6,0	117,5	— 0,3
30	122,4	4,6	121,8	— 0,6
33	126,2	3,8	125,3	— 0,9
36	129,6	3,4	128,2	— 1,4

Les nombres inscrits dans la quatrième colonne indiquent les nombres de décharges qu'il eût fallu obtenir pour que les accroissements des charges négatives du condenseur fussent rigoureusement en progression géométrique ; ces nombres ont été calculés en prenant 0,825 pour raison de la progression.

Si, une fois l'équilibre atteint et les feuilles d'or en repos, on supprime le collecteur en laissant le condenseur en relation avec l'électroscope, il s'écoulera, suivant la même loi, un flux égal d'électricité négative.

Cette expérience confirme donc la seule hypothèse que l'on eût faite dans le raisonnement, à savoir que *le flux d'électricité qui s'écoule par le fil de coton est proportionnel à chaque instant à la différence des potentiels des deux extrémités du fil.*

M. Gaugain a étudié aussi par la même méthode le cas d'un condensateur formé de trois plateaux parallèles, et même celui deux condensateurs à plateaux tels que le condenseur du mier fût réuni au collecteur du second par le moyen d'un fil

de coton et d'un électroscope. Nous n'insisterons pas davantage sur ces expériences, parce que les résultats relatifs à ces condensateurs complexes sont des conséquences de ce qui précède et peuvent être facilement prévus par la théorie.

ROLE DU MILIEU ISOLANT DANS LES CONDENSATEURS.

378. **Expériences de Faraday. — Pouvoir inducteur spécifique.** — Aussitôt après la découverte de la bouteille de Leyde, les physiciens reconnurent que toutes les espèces de verre ne réussissent pas également, et que, pour des bouteilles de mêmes dimensions et de même épaisseur, la charge fournie à l'appareil par une même source dépend de la nature du verre. On attribuait généralement ces différences à une conductibilité particulière de la lame de verre ; l'emploi des milieux isolants solides interposés entre les armatures était considéré comme ayant pour but unique d'empêcher la décharge spontanée du condensateur. Faraday a montré que le rôle du milieu interposé est plus complexe. Nous avons décrit déjà (106) l'expérience par laquelle Faraday démontre que l'influence électrique entre deux plateaux est plus énergique quand on remplace la couche d'air par un milieu solide isolant, et indiqué, à ce propos, le principe d'une méthode qui permettrait de déterminer le *pouvoir inducteur spécifique* d'un isolant, c'est-à-dire le rapport de la quantité d'électricité développée par influence à travers ce milieu à la quantité d'électricité qui se produirait au travers d'une couche d'air de même épaisseur.

379. Faraday employait pour cela un appareil auquel il a donné le nom d'*inductomètre différentiel* (1), et qui se compose de deux condensateurs sphériques de mêmes dimensions dont les armatures sont séparées, dans l'un par une couche d'air et dans l'autre par un milieu quelconque. L'armature extérieure B de ces condensateurs (fig. 157) est formée, identiquement comme les hémisphères de Magdebourg, de deux calottes dont l'une est munie d'un robinet afin que l'on puisse faire le vide dans l'ap-

(1) *Experimental Researches*, t. I, p. 371 et suiv.

pareil et y laisser rentrer un gaz quelconque. La calotte supérieure est munie d'une tubulure par laquelle on introduit une tige de métal terminée à l'extérieur par un bouton a et portant la sphère intérieure A. Cette tige est noyée dans un cylindre de gomme laque que l'on mastique dans la tubulure par un bourrelet de résine r. La sphère intérieure avait un diamètre de 2,33 pouces et le diamètre intérieur de l'enveloppe B était de 5,57 pouces.

Fig. 157.

La manière d'opérer est la suivante. Considérons deux appareils identiques dont l'un contienne de l'air et l'autre un milieu isolant. On charge le premier d'électricité, et l'on touche le bouton a avec un plan d'épreuve qu'on porte dans une balance de Coulomb dont la boule mobile est chargée ; on obtient une torsion T pour un certain angle d'écart. Le second appareil étant à l'état neutre, on réunit les deux armatures intérieures, puis on touche de nouveau le point a de la première avec le plan d'épreuve, ce qui donne dans la balance, pour le même angle d'écart, une torsion T'. Les deux appareils ne se partagent pas également la charge primitive, et l'on trouve que la torsion T' est généralement plus petite que $\frac{T}{2}$. Le rapport des charges M et M' qui étaient dans les deux cas sur le premier appareil est

$$\frac{M}{M'} = \frac{T}{T'},$$

et la charge prise par le second condensateur est M — M' ; on déduit de l'équation précédente

$$\frac{M - M'}{M'} = \frac{T - T'}{T'}.$$

On obtient ainsi le rapport des charges que prennent les deux condensateurs quand ils communiquent entre eux, c'est-à-dire

quand ils ont le même potentiel; c'est le rapport de leurs capacités électriques ou le rapport des pouvoirs inducteurs spécifiques des deux milieux isolants.

Pour éliminer les erreurs dues à la déperdition, on répète une série d'expériences analogues en commençant par charger le second appareil; on obtient ainsi pour le pouvoir inducteur spécifique deux valeurs dont l'une est trop grande, l'autre trop petite, et l'on prend la moyenne des résultats.

380. Enfin, il n'est pas nécessaire de remplir complétement du corps à étudier l'intervalle des deux surfaces du second appareil. Faraday se bornait le plus souvent à y introduire un bloc en forme de coupe hémisphérique qui n'occupait que la moitié de l'espace compris entre les deux armatures. Supposons que, dans ces conditions, le rapport de capacités des deux condensateurs déterminé par expérience soit égal à $1+\alpha$. Cela signifie que l'influence qui s'exerce au travers des deux couches hémisphériques d'air dans le premier appareil, influence que nous désignerons par $2i$, est à l'influence qui a lieu dans le second par une couche d'air et une couche du milieu à étudier, influence que l'on peut représenter par $i+i'$, dans le rapport de 1 à $1+\alpha$, ce qui donne

$$\frac{i+i'}{2i}=\frac{1+\alpha}{1}.$$

On en déduit pour le rapport des quantités d'électricité développées par influence au travers des deux lames, c'est-à-dire pour le pouvoir inducteur spécifique de la substance,

$$\frac{i'}{i}=1+2\alpha.$$

381. Faraday a fait un très-grand nombre d'expériences à ce sujet et il est arrivé aux conséquences suivantes :

1°. Tous les gaz simples ou composés ont le même pouvoir inducteur, et ce pouvoir est indépendant de la pression. En particulier, il n'y a pas de différence appréciable entre l'air sec et l'air humide.

2°. Les liquides isolants n'ont pas donné de résultats bien nets, mais ils paraissent cependant doués d'un pouvoir inducteur supérieur à celui du gaz.

3°. Les corps cristallisés n'ont pas manifesté de différences sensibles dans les diverses directions.

4°. Les pouvoirs inducteurs spécifiques des différents isolants sont, en prenant celui de l'air pour unité :

Air.	1	Gomme laque. . .	2
Spermaceti. . . .	1.45	Soufre.	2.24
Verre.	1.76		

M. Harris a repris ces expériences de Faraday, en remplaçant les sphères par des plateaux parallèles, ce qui présente moins de difficultés, et il a obtenu à peu près les mêmes résultats :

Air.	1	Cire d'abeilles. . .	1.86
Résine.	1.77	Verre.	1.90
Poix.	1.80	Gomme laque. . .	1.95

A ces nombres, M. Jenkin [1] ajoute les suivants sans en indiquer l'origine, sauf pour le premier qui est emprunté aux expériences de MM. Gibson et Barklay :

Paraffine.	1.98
Caoutchouc India rubber	2.8 à 3.1
Gutta percha.	3.39 à 4.2
Mica.	3

MM. Gibson et Barklay ont constaté que le pouvoir inducteur de la paraffine ne varie pas d'une manière appréciable entre les températures de — 12° et — 24°.3.

382 Cette découverte de Faraday a vivement frappé les physiciens, dont quelques-uns étaient arrivés à révoquer en doute toutes les théories antérieures. « Avant d'exposer, dit M. de la Rive [2], la théorie à laquelle ces faits ont conduit M. Faraday, étudions les faits eux-mêmes découverts par ce physicien : nous serons ainsi mieux placés pour apprécier en quoi ils doivent modifier, s'il ne les renversent pas complétement, les théories basées sur les travaux de Coulomb et de Poisson. » Faraday expose d'ailleurs sa manière de concevoir les phénomènes dans les termes suivants :

« A présent, je crois que l'induction ordinaire influence est,

[1] *Electricity and magnetism*. Londres, 1873, p. 47.

[2] *Traité d'électricité*, t. I, p. 128.

dans tous les cas, une action des particules contiguës consistant en une sorte de polarité, au lieu d'être une action des particules ou des masses à des distances sensibles; et, si cela est exact, l'établissement d'une telle vérité doit être de la plus grande importance pour les progrès ultérieurs des recherches sur la nature des forces électriques [1]. »

L'idée que les forces électriques, et même plus généralement toutes les actions naturelles, ne peuvent s'exercer entre deux corps que par l'intervention du milieu interposé, paraît avoir acquis une grande faveur depuis quelques années; mais, sans qu'on puisse affirmer ou nier une telle hypothèse qui touche à la nature intime des phénomènes physiques, il importe de remarquer qu'au moins pour les phénomènes électriques, cette conclusion n'est pas une conséquence nécessaire des découvertes de Faraday. Tous les faits observés par ce physicien peuvent s'expliquer facilement par les actions à distance, en faisant intervenir l'électrisation des milieux isolants.

383. La détermination des pouvoirs inducteurs spécifiques, par la comparaison des densités, ne comporte pas une très-grande précision; les nombres que nous avons empruntés aux expériences de Faraday ne sont que des moyennes d'expériences assez peu concordantes entre elles. La comparaison des capacités électriques ou des potentiels par les électromètres donnerait des résultats plus constants, et cette méthode a été employée depuis par plusieurs physiciens.

Il y a, d'ailleurs, dans toutes ces questions, un élément dont Faraday n'a pas tenu compte et qui joue un rôle important, c'est la *durée* de l'influence. M. Gaugain a fait voir, en effet, que l'influence électrique à travers les isolants solides dépend du temps, qu'elle augmente peu à peu à mesure que l'expérience se prolonge, de sorte que le pouvoir inducteur spécifique est une fonction du temps et qu'il est nécessaire de faire entrer cette considération nouvelle dans l'étude des phénomènes.

384. **Expériences de M. Gaugain.** — M. Gaugain a étudié [2] par l'électroscope à décharges les différentes circonstances qui se présentent dans les condensateurs à couche isolante solide:

[1] *Experimental Researches*, t. I, p. 362.
[2] *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. II, p. 264.

1° la durée de la charge ; 2° la charge maximum et la charge minimum ; 3° la décharge brusque et la charge résiduelle ; 4° la décharge lente.

Durée de la charge. — M. Gaugain avait déjà constaté que la quantité d'électricité qui s'accumule sur un câble télégraphique immergé, lorsque le fil intérieur est mis en communication avec une source électrique déterminée, peut varier considérablement suivant que le câble reste plus ou moins longtemps en rapport avec la source. Cette observation a été le point de départ de ses recherches sur les condensateurs.

Un condensateur à lame d'air se charge instantanément, tandis que, si le milieu isolant est un corps solide, la charge que reçoit le condensateur d'une source donnée dépend en général du temps pendant lequel il reste en communication avec la source.

Toutefois, pour que la durée de charge du condensateur à air soit inappréciable, comme nous l'avons dit, il est nécessaire d'éviter les causes de ralentissement qui pourraient provenir de la source elle-même ou des organes de communication ; il faut que les tiges de communication soient très-conductrices, que le condensateur que l'on étudie ait une capacité très-faible par rapport à celle de l'appareil qui sert de source, comme dans les expériences de M. Gaugain, ou que le débit de la source soit tellement grand que le temps nécessaire pour fournir la charge totale du condensateur soit négligeable.

385. M. Gaugain n'a employé dans ces recherches que des condensateurs à plateaux à armatures mobiles. Cette forme est d'abord d'une construction très-commode et, en outre, elle permet de séparer du milieu isolant l'armature qu'on veut jauger. Une telle manœuvre est presque toujours indispensable, car si, dans un cas, il faut beaucoup de temps pour saturer un condensateur, il en faut également beaucoup pour le décharger, et la perte par l'air devient relativement considérable quand le flux transmis à l'électroscope mesureur est très-lent.

Pour éviter un flux trop rapide dans les premiers instants, on commence l'opération du jaugeage en laissant en place l'armature que l'on étudie, puis on l'écarte graduellement de la couche isolante, à mesure que le dégagement d'électricité se ralentit, de

manière que la vitesse des décharges soit à peu près uniforme et qu'aucune partie de l'électricité n'échappe au jaugeage. On avait soin de vérifier, d'ailleurs, que l'armature n'avait laissé aucune trace d'électricité sur la lame isolante et que celle-ci était parfaitement neutre après l'opération. Avec des potentiels aussi faibles que ceux qu'employait M. Gaugain, il n'y avait guère à craindre que l'électricité passât du conducteur à la lame isolante, pourvu toutefois qu'il n'y eût entre les deux surfaces aucune trace d'humidité.

386. Pour donner une idée de la lenteur avec laquelle s'effectue dans certains cas l'accroissement de charge, nous citerons une série d'expériences faites avec un carreau fulminant formé de deux plateaux de 75 millimètres de diamètre séparés par un disque de soufre de 6 millimètres d'épaisseur. La quantité d'électricité du plateau collecteur est évaluée par le nombre des décharges que ce plateau fournit à l'électroscope.

DURÉE DE LA CHARGE	CHARGE DU COLLECTEUR	DURÉE DE LA CHARGE	CHARGE DU COLLECTEUR
Fraction de seconde.	22	8 minutes.	35
30 secondes.	28	16 »	37
2 minutes.	30	32 »	39
4 »	33	64 »	42

La charge instantanée n'est pas la moitié de celle qu'on obtient au bout d'une heure, et alors le maximum n'est pas encore atteint.

De même, il faut plus d'un quart d'heure pour charger à refus un condensateur à gâteau de gomme-laque, et aussi plus d'un quart d'heure pour le décharger complétement. La charge que l'on obtient au bout de ce temps est au moins triple de celle que donne un contact instantané.

Ce phénomène est lié à une modification lente de l'état électrique du gâteau isolant. L'électricité ne quitte pas les armatures, parce que les potentiels ne sont pas assez élevés, mais le gâteau isolant se charge, sur chacune des deux faces, d'électricité contraire à celle de l'armature voisine. Les choses se passent

donc comme si le disque isolant était un corps conducteur, et que ce conducteur fût séparé des armatures par des lames très-minces formées d'une substance complétement isolante.

Pour constater l'état électrique d'un disque isolant après qu'on a enlevé les armatures, on applique sur ses deux faces des armatures mobiles munies de manches isolants; on touche simultanément ces armatures, puis on les sépare et l'on détermine, au moyen d'un électroscope à feuilles d'or, la nature de l'électricité communiquée à chacune d'elles. Cette électricité développée par influence est de signe contraire à celle que possédait la face contiguë du gâteau isolant.

387. *De la charge maximum.* — Pour étudier la limite de charge, M. Gaugain employait des gâteaux isolants à surfaces bien planes et des armatures métalliques également planes. Mais, dans le plus grand nombre des cas, ces armatures métalliques n'ont pas été appliquées directement sur le gâteau, elles en ont été séparées par de petites lames d'air : on donnait à ces lames d'air une épaisseur constante, en collant sur la face interne de chaque armature trois pastilles de gomme-laque plus ou moins épaisses. Le milieu isolant était ainsi formé de deux couches d'air séparées par une lame solide.

Si la couche interposée entre les deux lames d'air est formée d'un corps conducteur, la charge limite est obtenue dans un temps inappréciable et elle est la même que si ce conducteur n'existait pas, autant du moins que l'épaisseur de ce conducteur reste petite par rapport au diamètre commun des disques et que la somme des épaisseurs d'air situées de part et d'autre de ce conducteur reste constante dans toutes les expériences. Si le corps interposé est un gâteau mauvais conducteur, la charge limite n'est atteinte qu'au bout d'un temps plus ou moins long, mais elle est en général *indépendante de la nature et de l'épaisseur du corps isolant avec lequel on opère.*

388. Cette propriété s'est vérifiée pour des gâteaux de diverses substances dont l'épaisseur a varié de 5 millimètres à 39 millimètres, le plateau ayant 74 millimètres de diamètre. Voici quelques expériences :

DIAMÈTRE DES PLATEAUX ET DE LA LAME INTERPOSÉE 74mm.

LAME INTERPOSÉE		DURÉE DE LA CHARGE	CHARGE DU COLLECTEUR
NATURE	ÉPAISSEUR		
Zinc.	5mm	instantanée.	21
	39	«	21
Acide stéarique	6	Quelques instants.	13
		5 minutes.	20
		10 »	21
Acide stéarique	17	Quelques instants.	9
		5 minutes.	14
		10 »	14
		20 »	16
		2 h. 15′	19
		2 h. 40′	20
Gutta percha.	6	Quelques instants.	15
		5 minutes.	17
		10 »	21
		20 »	22
Gomme laque.	6	Quelques instants.	14
		5 minutes	20
		20 »	22
Soufre.	6	Quelques instants.	15
		⋮ ⋮	⋮
		7 h. 30′	21

Un résultat si imprévu nous paraît dû, sinon entièrement, du moins en grande partie, à la conductibilité superficielle de toutes les surfaces des corps solides exposés à l'air; les disques isolants se comportent en réalité comme s'ils étaient enveloppés par une lame infiniment mince d'une substance médiocrement conductrice. Cette explication fait aussi comprendre pourquoi le temps nécessaire pour atteindre la limite de charge augmente avec l'épaisseur de la couche isolante, c'est-à-dire avec l'étendue des surfaces.

En répétant la même expérience avec un gâteau isolant

non continu, formé de fleur de soufre tassée, M. Gaugain a obtenu une charge notablement plus faible, ce qui peut être dû uniquement au défaut de continuité des surfaces. En effet, quand on humecte la fleur de soufre d'une quantité suffisante d'huile d'olive, on obtient exactement les mêmes effets qu'avec un gâteau de soufre fondu.

389. Quant à cette propriété que l'interposition d'une lame conductrice n'a pas d'influence sur la charge du collecteur, pourvu que la somme des épaisseurs des deux couches d'air reste constante, elle est une conséquence très-simple de la théorie, comme il est facile de le démontrer.

Considérons, en effet, un plateau collecteur A, porté au potentiel V et séparé par une couche d'air d'épaisseur e d'un disque C primitivement à l'état neutre d'épaisseur E, ce dernier étant lui-même séparé par une couche d'air d'épaisseur e' du plateau condenseur B, lequel communique avec le sol. Le conducteur intermédiaire C se charge par influence et prend un potentiel V'. Si l'on suppose ces plateaux indéfinis par rapport aux épaisseurs e, E et e', les quatre couches électriques $+M$ sur la face interne du collecteur A, $-M'$ et $+M'$ sur les deux faces du conducteur C, et $-M''$ sur le condenseur B, sont égales en valeurs absolues. Les densités, μ sur la face interne du collecteur et μ' sur la face du conducteur C qui regarde le condenseur, sont données par les équations

$$\mu = \frac{V - V'}{4\pi e}, \quad \mu' = \frac{V' - 0}{4\pi e'};$$

comme ces densités sont égales, on en déduit

$$\mu = \frac{V}{4\pi(e + e')}.$$

La charge du collecteur A est donc la même que si le conducteur intermédiaire n'existait pas, les deux armatures étant rapprochées d'autant, pour que l'épaisseur de la lame d'air ne soit pas modifiée.

390. Si les armatures sont en contact avec le disque isolant, ce qui est le cas du carreau fulminant de Franklin, la charge est de beaucoup plus forte que celle qui est obtenue en

interposant de minces lames d'air, et cette charge n'est atteinte qu'au bout d'un temps beaucoup plus long ; il devient alors difficile de comparer entre elles les charges fournies par des milieux différents. Les expériences paraissent indiquer cependant que la charge limite varie avec la nature du milieu isolant. On a obtenu ainsi pour deux carreaux fulminants de mêmes dimensions qui avaient pour lame isolante, l'un la gutta percha et l'autre l'acide stéarique :

DURÉE DE LA CHARGE	CHARGE		RAPPORT
	ACIDE STÉARIQUE	GUTTA PERCHA	
20 minutes.	105	111	1,08
40 »	121	132	1,09
1 h. 20′	126	144	1,14

Il paraît difficile, dans ce genre d'expériences à longue durée, d'éviter les erreurs dues à la conductibilité superficielle.

391. *De la charge minimum.* — Il est plus intéressant de comparer les charges que prennent les différents condensateurs pendant le temps le plus court possible. Pour réduire la durée de la charge à un très-court intervalle de temps, M. Gaugain a fait usage d'un appareil très-simple. Cet appareil est principalement composé d'une petite auge fixe en laiton C (fig. 158) et d'une pointe d'acier P à laquelle on peut communiquer un mouvement rapide. L'auge de laiton, de forme rectangulaire, est fixée au sommet d'une colonne de caoutchouc durci et commu-

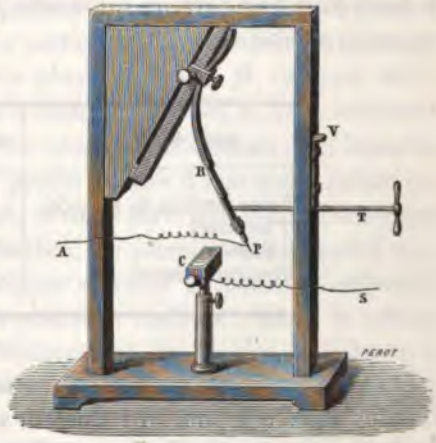


Fig. 158.

nique avec la source d'électricité par un fil S. La pointe d'acier, isolée au moyen d'une seconde tige de caoutchouc, communique avec le collecteur par un autre fil A. On remplit complétement d'eau l'auge de laiton, de manière que le liquide s'élève au-dessus des parois, et l'on s'arrange de façon que la pointe d'acier vienne, dans son mouvement rapide de translation, couper en travers la crête du ménisque formé par la surface liquide. Cette condition est facile à remplir, parce que l'auge peut-être maintenue à une hauteur convenable par une vis de pression. Pour mettre en mouvement la pointe d'acier, on fixe la tige de caoutchouc qui la porte à l'extrémité libre d'un faisceau de lames de ressort R attaché par sa partie supérieure ; on maintient ce ressort bandé par une tige de fer T qui passe dans un montant en bois où elle est retenue par un verrou V qui s'engage dans une entaille. Au moment de faire l'expérience, on soulève le verrou, le ressort se détend brusquement et la durée du contact de la pointe d'acier avec le liquide ne dépasse pas un centième de seconde.

En prenant pour unité la charge du collecteur lorsque la couche isolante est une lame d'air, cas où la durée du contact n'a pas d'influence appréciable, M. Gaugain a obtenu, en remplaçant la lame d'air d'un carreau fulminant par une couche d'acide stéarique du commerce :

DURÉE DU CONTACT	CHARGE DU COLLECTEUR
Petite fraction de seconde.	1,30
2 secondes.	1,85
1 minute.	2,71
Plusieurs heures.	7

Les nombres de la dernière colonne représentent ce que Faraday appelle le pouvoir inducteur spécifique du corps isolant. Cette quantité paraît tendre vers l'unité pour un temps infiniment court, mais avec le temps elle augmente d'une manière considérable. Dans les expériences de Faraday et des physiciens qui ont opéré d'une manière analogue, la durée du contact était

probablement d'au moins une seconde, et les nombres qu'ils ont obtenus sont voisins de 1,8, ce qui s'accorde avec les résultats précédents.

392. M. Gaugain, après avoir ainsi mis en évidence l'influence du temps, a déterminé les pouvoirs inducteurs spécifiques de différents isolants, d'abord pour un contact aussi court que possible, puis pour un contact de deux secondes.

UNE FRACTION DE SECONDE		2 SECONDES	
Air.	1	Air.	1
Acide stéarique. . . .	1,30	Soufre.	1,71
Spermaceti.	1,47	Caoutchouc. . . .	1,78
Cire.	1,50	Spermaceti. . . .	1,85
Caoutchouc vulcanisé.	1,50	Acide stéarique. . . .	1,92
Gomme laque. . . .	1,53	Gutta.	2,07
Soufre.	1,57	Gomme laque. . . .	2,07
Gutta.	1,60	Cire.	2,21

On remarque dans ces tableaux plusieurs inversions, par exemple pour l'acide stéarique et le soufre, qui se trouvent alternativement en tête de la liste et presque à la fin ; et il est à présumer que de nouvelles perturbations se manifesteraient si l'on faisait durer l'expérience plus longtemps. M. Gaugain attribue ces résultats au défaut d'homogénéité des milieux isolants : imaginons, en effet, une masse absolument isolante dans laquelle se trouvent disséminées de petites masses d'une autre substance parfaitement conductrice, et, d'autre part, une masse homogène douée d'une faible conductibilité. Le premier milieu prend immédiatement son état électrique définitif et pourra l'emporter sur le second pendant les premiers instants ; mais le milieu homogène, dans lequel le déplacement des fluides se fait peu à peu, prendra le dessus lorsque les charges seront suffisamment prolongées.

M. Gaugain est parvenu à démontrer directement cette influence de l'hétérogénéité au moyen de deux gâteaux de soufre qui contenaient, l'un une petite quantité d'eau, l'autre une proportion un peu plus grande d'huile d'olive.

DURÉE DE LA CHARGE	DIÉLECTRIQUE INTERPOSÉ	DÉCHARGES
Une fraction de seconde. . . .	de l'eau	45
	de l'huile	32
5 minutes.	de l'eau	62
	de l'huile	80

395. Il semble aussi résulter de là que, si un milieu était parfaitement isolant, il se comporterait de la même manière que l'air et atteindrait instantanément sa limite. En opérant avec un gâteau de fleur de soufre ordinaire, M. Gaugain a constaté que la quantité d'électricité accumulée sur le collecteur restait toujours la même, quelle que fût la durée de la charge : que cette quantité était notablement supérieure à celle qu'eût fournie un condensateur à air, et plus petite de beaucoup que celle qui eût été obtenue en remplaçant le gâteau de fleur de soufre par un conducteur homogène. D'après cela, la fleur de soufre devrait donc contenir des parties très-conductrices et d'autres absolument isolantes.

Enfin, avec un gâteau de soufre amorphe, la charge a été constamment égale à celle d'un condensateur à air, quelle que fût la durée : il résulterait de là que le soufre amorphe est absolument dépourvu de conductibilité. Malheureusement ce résultat n'a pas été établi d'une manière très-rigoureuse, en raison de l'excessive ténuité du soufre amorphe qui, à un volume égal, pèse environ 5 fois moins que le soufre octaédrique pulvérisé.

Quoi qu'il en soit, ce que Faraday a appelé pouvoir inducteur spécifique est une propriété très-complexe, due, en partie au moins, à la conductibilité des milieux employés et, en partie aussi, soit à l'existence d'éléments conducteurs disséminés dans la masse, soit, ce qui revient au même, à une polarisation qui s'établirait d'une manière instantanée.

394. *De la décharge brusque et de la charge résiduelle.* — Lorsqu'on décharge un condensateur en réunissant les armatures par un conducteur et qu'on les isole ensuite, il arrive presque toujours qu'en recommençant l'épreuve au bout de quelques

instants, on obtient une nouvelle étincelle. L'existence de cette électricité de résidu ou de la *charge résiduelle* peut tenir à plusieurs causes différentes.

Si le condensateur est à lame d'air et si, maintenant un conducteur en communication avec l'une des armatures, on l'approche peu à peu de l'autre armature jusqu'à ce qu'une étincelle se produise, on remarque que l'on peut obtenir une nouvelle étincelle en approchant davantage le conducteur. Cette expérience se conçoit aisément : le passage de l'électricité par le chemin où se produit l'étincelle, quelque rapide qu'il soit, n'est pas instantané ; la résistance que l'air opposait au passage diminue d'une manière considérable au moment de l'étincelle, mais cette résistance n'est pas annulée et il arrive bientôt que l'électricité qui ne s'est pas encore écoulée n'a plus une densité assez grande pour franchir l'intervalle des armatures. En diminuant cet intervalle on produira une nouvelle décharge partielle du résidu, et ainsi de suite ; les armatures ne seront ramenées à l'état neutre que lorsque le contact entre elles aura été établi.

Ce raisonnement permet aussi de prévoir que la nature de l'arc qui établit une communication entre les deux armatures joue un rôle important. M. Gaugain a constaté, en effet, que la première étincelle produit une décharge presque complète quand l'arc intermédiaire est très-bon conducteur, et que le résidu augmente si l'on remplace cet arc par un corps moins bon conducteur. La quantité d'électricité qui passe dans la première étincelle est même en raison inverse de la résistance du circuit intermédiaire.

Un deuxième cas un peu plus complexe est celui où une lame isolante solide est placée entre les deux armatures sans toucher aucune d'elles. L'appareil étant électrisé, on ne parvient pas à le décharger d'une manière complète en établissant entre les deux armatures une communication conductrice de courte durée ; si l'on rétablit le contact au bout d'un certain temps, on obtient une nouvelle étincelle. La couche isolante ayant été peu à peu électrisée par influence, ses deux faces sont chargées d'électricités différentes et chacune d'elles maintient sur l'armature la plus voisine une couche d'électricité de nom contraire ; ces deux armatures, quoiqu'étant au même potentiel au moment du

contact, peuvent ainsi conserver des charges d'électricités différentes. Mais la décharge partielle a modifié le potentiel aux différents points de la couche isolante; les fluides électriques qui avaient été séparés s'y recombinent peu à peu et les armatures reprenant des potentiels différents peuvent fournir une nouvelle décharge incomplète; il faudra répéter cette opération un grand nombre de fois ou maintenir un contact prolongé pour ramener l'appareil à l'état neutre.

Le même phénomène a lieu quand les armatures sont en contact avec une lame isolante solide et que l'on opère avec de faibles potentiels, comme dans les expériences de M. Gaugain. Mais, si les potentiels sont considérables, les couches électriques des armatures peuvent quitter ces conducteurs, s'appliquer sur des faces correspondantes de la lame isolante, comme nous l'avons vu, et même y pénétrer jusqu'à une certaine profondeur. Cette cause nouvelle interviendra encore dans les phénomènes de la décharge. Lorsque les armatures sont mises en communication, les couches électriques répandues sur la lame isolante s'échappent en partie et repassent sur les conducteurs qui les touchent. Puis, quand on isole de nouveau les armatures (127), il s'établit lentement un autre état d'équilibre et l'on pourra obtenir une seconde décharge partielle, etc. Le phénomène est alors très-complexe et il paraît difficile d'en concevoir nettement tous les détails.

395. M. Gaugain a étudié la décharge brusque et la charge résiduelle avec de petits carreaux fulminants à armatures mobiles : dans certains cas, les armatures étaient appliquées sur le corps isolant; dans d'autres, elles en étaient séparées par de petites couches d'air. Les résultats généraux ont été les mêmes avec l'une et l'autre disposition.

Dans une première série d'expériences, il s'est proposé de reconnaître suivant quelle loi varie la charge résiduelle, lorsqu'on fait varier la durée de la charge en maintenant la source constante. Tantôt on faisait manœuvrer à la main le fil métallique destiné à opérer la décharge, tantôt on se servait de l'appareil à ressort; dans le second cas, la durée du contact ne dépasse pas $\frac{1}{100}$ de seconde, tandis qu'elle peut atteindre $\frac{2}{10}$ ou $\frac{8}{10}$ dans le premier, mais les deux procédés étaient équivalents.

Le collecteur étant mis en communication avec la source pendant un certain temps, on détermine sa charge totale par l'électroscope jauge. Lorsque le corps isolant est revenu à l'état neutre, on charge de nouveau le collecteur pendant le même temps, puis on le décharge immédiatement en établissant une communication d'un instant entre les armatures; alors on enlève le collecteur et on jauge la quantité d'électricité qu'il conserve, ce qui donne la charge résiduelle. Lorsqu'on répète cette double série d'expériences sur un même condensateur, en donnant successivement des valeurs diverses à la durée de la charge, on arrive à ce résultat très-simple que *la différence entre la charge totale et la charge résiduelle reste constante.* Cette différence, qui représente la quantité d'électricité disparue dans une décharge instantanée, est précisément égale à la charge totale instantanée.

Cette loi a été vérifiée sur des corps isolants très-différents, des disques de gomme laque, d'acide stéarique et de gutta percha, et sur un gâteau de soufre humecté d'huile d'œillette.

Voici, par exemple, les résultats obtenus sur ce dernier corps :

DURÉE DE LA CHARGE	CHARGE		DIFFÉRENCE OU DÉCHARGE INSTANTANÉE
	TOTALE	RÉSIDUELLE	
Fraction de seconde	26	0	26
2 minutes.	44	18	26
4 »	49	23	26
8 »	55	28	27
16 »	59	33	26

396. Cette relation si simple est une conséquence immédiate de l'existence d'éléments médiocrement conducteurs dans le milieu interposé. La quantité d'électricité qui s'échappe par un contact de très-courte durée ne dépend que des éléments du milieu interposé qui sont conducteurs ou qui se polarisent instantanément, et elle est évidemment égale à la charge instantanée; le reste, qui s'est produit lentement, est retenu par l'électrisation des éléments peu conducteurs.

En effet, pour que la loi se vérifie, il est nécessaire de décharger le condensateur aussitôt qu'on l'a détaché de la source électrique; si l'on sépare la charge de la décharge par des intervalles de plus en plus longs, l'électrisation du gâteau par conductibilité augmente peu à peu et la décharge diminue de plus en plus.

Ainsi, avec un gâteau de gomme laque de 6 millimètres d'épaisseur, l'appareil ayant été chargé instantanément, puis relié avec l'électroscope, a fourni 45 décharges; après une nouvelle charge instantanée et une décharge brusque immédiate, le résidu a été nul. On charge de nouveau pendant un instant, et au bout de 15 minutes seulement on relie le collecteur à l'électroscope : on obtient encore 45 décharges, c'est-à-dire que la perte a été insignifiante. On charge encore de la même manière et au bout de 15 minutes on produit une décharge brusque; on relie le collecteur à l'électroscope et on obtient cette fois un résidu de 27 décharges. La quantité d'électricité dépensée dans la décharge brusque a donc diminué de 45 à $45 - 27 = 18$, suivant qu'on l'effectue immédiatement ou bien au bout de 15 minutes.

397. En résumé, un condensateur à isolant solide peut prendre une charge considérable si on le maintient pendant longtemps en communication avec la source, mais toute cette électricité ne peut pas être utilisée pour une décharge brusque. Si la source a un débit ou des dimensions suffisantes, un contact instantané donne au collecteur le maximum de charge utilisable; si le débit de la source est trop faible, le maximum d'effet utile sera atteint quand le potentiel du collecteur deviendra égal au potentiel limite de la source. On voit encore par les résultats rapportés au n° 392 que, pour la décharge brusque, tous les isolants solides sont à peu près équivalents et qu'ils fournissent une fois et demie autant d'électricité que celle d'un condensateur à lame d'air de même épaisseur, en supposant toutefois que l'expérience soit possible dans ce dernier cas et que la couche d'air soit suffisante pour empêcher la production d'une étincelle directe entre les deux armatures. Le rôle des isolants solides est donc surtout de s'opposer à ces étincelles directes. Toutefois, le choix des isolants n'est pas absolument indifférent parce qu'ils donneront lieu à des résidus très-inégaux et que la charge

à refus du condensateur exigera un temps plus ou moins long.

Il faut remarquer encore que ces résultats n'ont été obtenus qu'avec des potentiels très-faibles et des condensateurs à plateaux; il n'est pas permis d'étendre les mêmes conclusions aux cas de condensateurs fermés comme les bouteilles de Leyde et de potentiels beaucoup plus grands, mais, selon toute apparence, les phénomènes doivent présenter alors la même marche.

398. **Expériences de M. Boltzmann.** — M. Boltzmann a publié (1) une série de recherches sur la *constante diélectrique*, c'est-à-dire sur le pouvoir inducteur spécifique, de différents corps isolants. La méthode de M. Boltzmann consiste à déterminer directement par le moyen d'un électromètre à quadrants de Thomson, la capacité d'un condensateur à plateaux entre les armatures duquel on introduit des lames isolantes. Le condensateur était formé de deux plateaux parallèles de 150 millimètres de diamètre, et les lames isolantes étaient des disques carrés de 200 millimètres de côté, de façon que ces lames dépassaient les bords des plateaux d'au moins 20 millimètres dans tous les sens.

Si la distance des plateaux est assez petite par rapport à leur diamètre, la capacité C du collecteur, quand le milieu isolant est une lame d'air, est sensiblement en raison inverse de l'épaisseur E de la couche d'air, de sorte que l'on peut écrire

$$(1) \qquad C = \frac{A}{E}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{A} E.$$

Si maintenant on introduit entre les armatures une lame isolante d'épaisseur e dont le pouvoir inducteur spécifique est égal à D, il ne restera plus qu'une couche d'air d'épaisseur $E - e$ et la lame solide se comportera comme une couche d'air d'épaisseur plus faible $\frac{e}{D}$, de sorte que la capacité nouvelle C′ du collecteur sera donnée par l'équation

$$(2) \qquad \frac{1}{C'} = \frac{1}{A}\left(E - e + \frac{e}{D}\right).$$

(1) *Pogg. Annal.* T. CLI, p. 482 et 551 (1874).

A l'aide d'une pile de quelques éléments Daniell, M. Boltzmann chargeait d'abord l'électromètre seul, puis le condensateur seul qu'il isolait et faisait ensuite communiquer avec l'électromètre. Les déviations, corrigées par une table de graduation empirique, permettent, comme nous l'avons vu, de calculer les rapports des capacités C et C′ à la capacité de l'électromètre, et le quotient de ces deux nombres donne le rapport des capacités C et C′, c'est-à-dire la valeur de la fraction

$$\frac{E - e + \frac{e}{D}}{E},$$

de laquelle on déduira aisément la constante diélectrique D.

Les expressions qui précèdent renferment la distance E des deux plateaux, qu'il est difficile d'évaluer directement, mais on peut aisément éliminer cette difficulté, comme l'a fait M. Thomson (279). Il suffit de remarquer que, pour une deuxième expérience, faite avec une couche d'air d'épaisseur différente E_1, la capacité nouvelle C_1 du collecteur sera donnée par l'équation

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{A} E_1; \tag{3}$$

on en déduit

$$\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C} = \frac{1}{A}\left(E_1 - E\right),$$

et l'on voit qu'en opérant de cette manière, on n'aura à évaluer que les changements d'épaisseur, ce qui se fait aisément à l'aide d'une sorte de vernier que l'on vise avec un microscope.

399. M. Boltzmann divise les corps qu'il a étudiés en deux groupes : les uns, tels que la gomme-laque, la paraffine, le soufre et la colophane, se comportent comme des corps isolants parfaits, c'est-à-dire, qu'en les employant, la charge maximum du collecteur est atteinte, sinon instantanément, du moins au bout d'un temps très-court; au contraire, avec la gutta-percha, la stéarine et le verre, la charge va en augmentant avec le temps d'une manière sensible.

Dans ces expériences, la communication du collecteur avec la pile durait environ 20 secondes, et l'observation de l'électro-

mètre n'exigeait pas plus d'une minute. M. Boltzmann a vérifié l'exactitude des formules (1) et (2) ; il a employé des lames d'épaisseurs comprises entre 1 et 4 millimètres, et il a obtenu les résultats suivants comme moyennes de plusieurs séries d'observations qui paraissent très-concordantes :

Gomme laque	3,15
Paraffine	2,32
Soufre	3,84
Colophane	2,55

Ces nombres sont notablement plus grands que ceux qui ont été donnés par d'autres expérimentateurs, et la non-influence du temps paraît en contradiction avec les faits observés par M. Gaugain : les expériences citées par M. Boltzmann, en vue d'établir ce point important, sont malheureusement trop peu nombreuses et il est à regretter qu'elles n'aient pas été répétées dans des conditions plus variées, pour mettre en évidence la modification progressive du phénomène.

M. Boltzmann a cherché ensuite si ses résultats pouvaient être considérés comme une confirmation de la théorie par laquelle M. Maxwell [1] a cru démontrer que la constante diélectrique D d'un corps est égale au carré de l'indice de réfraction n.

Le tableau suivant indique au moins que les deux quantités considérées varient dans le même sens :

	n.	$\sqrt{D}$.
Soufre	2,040	1,960
Colophane	1,545	1,587
Paraffine	1,536 à 1,516	1,523
Gomme laque		1,775

Dans un mémoire plus récent [2], M. Boltzmann annonce avoir constaté que, conformément à la théorie de M. Maxwell, la constante diélectrique du soufre n'est pas la même dans les différentes directions, et que, pour les gaz aussi, l'indice de réfraction est égal à la racine carrée de la constante diélectrique. Il paraît difficile d'admettre que, dans des expériences de cette na-

[1] *Phil. transact.* vol. 155, part. I, p. 459.
[2] *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Vienne* (1874), p. 49.

ture, on puisse mettre en évidence des quantités aussi petites que l'excès de l'indice de réfraction d'un gaz sur l'unité, lequel n'atteint pas un millième.

400. **Des bouteilles de Leyde.** — Il reste encore quelques observations à faire au sujet de la bouteille de Leyde. La capacité d'une pareille bouteille, évaluée par la méthode de Faraday, est beaucoup plus grande que celle d'un condensateur à lame d'air de même épaisseur; mais cela n'indique pas le profit que l'on peut tirer d'une bouteille de Leyde, lequel dépend de la quantité d'électricité qui s'écoule pendant la décharge brusque, et non de la charge totale.

M. Riess a reconnu (316) en chargeant, par l'intermédiaire d'une bouteille de Lane, une batterie dont les armatures étaient reliées aux deux boules d'un excitateur, que le résidu de la batterie est toujours égal au sixième de la charge totale. J'ai répété cette expérience de diverses manières avec une grande batterie et constaté, qu'en effet, le rapport du nombre des étincelles de la bouteille de Lane, nécessaire pour provoquer la première décharge, au nombre des étincelles nécessaires pour les décharges suivantes ne variait qu'entre les limites 1,15 et 1,35 dont la moyenne 1,22 est très-sensiblement égale au rapport $\frac{6}{5}$ donné par M. Riess.

Toutefois, le phénomène paraît un peu plus complexe, car le rapport considéré va d'abord en croissant pour les premières décharges et ne devient constant qu'à partir de la cinquième ou sixième décharge. Ce rapport diminue d'ailleurs d'une manière sensible quand on augmente la distance explosive, c'est-à-dire que le résidu croît moins vite que la charge totale.

Si l'on admet que la charge totale soit égale à 1,9 fois celle d'un condensateur à lame d'air de même épaisseur, comme dans les expériences de Faraday, la décharge étant les $\frac{5}{6}$ de la charge totale, sera égale à $1,9 \times \frac{5}{6}$ ou 1,6 fois la charge d'un condensateur à lame d'air, ce qui est tout à fait conforme aux expériences de M. Gaugain.

401. Dans les expériences de cette nature, la durée de la charge d'une batterie est nécessairement assez grande, puisque le débit de la machine est limité et que, d'ailleurs, il doit être assez

lent pour que l'on puisse compter les étincelles de la bouteille de Lane. D'autre part, la décharge par une forte étincelle dure toujours un temps appréciable. Ces expériences n'indiquent donc pas ce qui se passerait avec des potentiels plus faibles et quelle serait alors l'influence du temps; il faut pour cela employer des méthodes analogues à celles de M. Gaugain.

On électrise, par exemple, une grande batterie à un potentiel peu élevé, puis tenant à la main la bouteille que l'on veut étudier, on la met en contact pendant un temps plus ou moins long avec l'armature intérieure de la batterie; on évalue alors par un électroscope-jauge la quantité d'électricité qu'a prise la bouteille. J'ai constaté ainsi, par quelques expériences d'essai, que la charge augmente d'une manière très-rapide pendant les premiers moments : la quantité d'électricité que prend la bouteille par un contact de 10 secondes peut être 4 ou 5 fois plus grande, ou même davantage, que si le contact est aussi court que possible; et au bout de 10 secondes la charge maximum n'est pas encore atteinte.

Le même phénomène a lieu pour la décharge. Si l'on fait communiquer un instant avec le sol le bouton de la bouteille électrisée et si l'on évalue, par l'électroscope-jauge, la charge résiduelle, on trouve qu'elle peut dépasser le tiers de la charge totale. Il serait utile de reprendre cette question d'une manière complète pour les bouteilles de Leyde, parce que c'est la forme de condensateur la plus employée et celle qui présente le plus d'intérêt au point de vue de la théorie.

402. Quoi qu'il en soit, l'influence du temps sur la charge et la décharge des batteries peut être attribuée, soit à une polarisation lente, soit à une conductibilité médiocre du milieu isolant. Il importe de remarquer cependant que, dans les bouteilles de bonne qualité, l'effet du temps doit être extrêmement faible et l'état définitif est atteint assez rapidement : quand une pareille batterie est munie d'un électroscope et qu'on l'isole après l'avoir électrisée, on remarque que la divergence du pendule diminue d'une manière très-lente, et cette diminution de potentiel est en grande partie causée par la déperdition d'électricité au contact de l'air ou le long de la surface du verre.

Si la lame de verre avait une conductibilité notable, la charge

résiduelle serait beaucoup plus grande qu'elle ne l'est en général, et la batterie, abandonnée à elle-même, ne devrait pas tarder à se décharger d'une manière complète. En réalité, la déperdition par les surfaces joue le rôle le plus important, et si l'on élimine cette cause d'erreur, on peut conserver la charge d'une bouteille pendant très-longtemps.

Franklin (1) cite, par exemple, une expérience dans laquelle un de ses amis avait électrisé une bouteille de Leyde et ensuite scellé le col à la lampe, après avoir enlevé le crochet de l'armature intérieure. Cette bouteille fut ouverte au bout de 7 mois et se trouva encore assez électrisée pour donner une étincelle, beaucoup moins énergique, il est vrai, que si on l'eut déchargée immédiatement. Canton (2) avait déjà électrisé, à la manière des bouteilles de Leyde, de petites boules en verre soufflé de sept à huit millièmes de pouce d'épaisseur, qu'il scellait ensuite hermétiquement. En présentant ces boules nues à un électromètre, il ne pouvait découvrir aucune trace d'électricité, mais il suffisait de les chauffer un peu en les tenant à quelques pouces d'un foyer pour qu'elles devinssent fortement électriques, et les mêmes effets se manifestaient jusqu'à ce que les boules fussent refroidies. La même expérience pouvait être répétée plusieurs fois, mais l'électricité diminuait peu à peu. Canton observa qu'une boule ainsi préparée pouvait être gardée sous l'eau sans inconvénient pendant plusieurs jours; enfin, il chargea une boule pareille le 22 septembre 1760 et la trouva encore fortement électrisée le 31 octobre suivant, quoiqu'elle eût servi à plusieurs reprises dans l'intervalle.

Ces expériences montrent qu'une faible élévation de température suffit pour augmenter sensiblement la conductibilité du verre, mais elles prouvent en même temps que cette conductibilité peut être très-faible pour des échantillons convenablement choisis, et qu'elle a peu d'importance dans les expériences ordinaires.

403. **Explication du pouvoir inducteur par la polarisation.** — Remarquons, pour terminer, que si l'on attribue le pouvoir inducteur spécifique d'un milieu isolant à une polarisation des

(1) Lettre à Kinnersley.
(2) Priestley. *Histoire de l'Électricité*, t. II, p. 101.

molécules, on peut alors se représenter les phénomènes d'une manière assez simple. Nous avons vu déjà (389) que l'introduction d'une lame conductrice entre les deux plateaux d'un condensateur produit le même effet que si l'on rapprochait les plateaux d'une distance égale à l'épaisseur de cette lame; c'est là une propriété générale.

Considérons, en effet, une bouteille de Leyde à air d'épaisseur très-faible et constante e, et supposons qu'entre les deux armatures il y ait une couche conductrice d'épaisseur ε, dont la distance à l'armature intérieure soit e_1 et la distance à l'armature extérieure e_2, de sorte que l'on aura

$$e = e_1 + \varepsilon + e_2.$$

Soit V le potentiel de l'armature intérieure, l'autre communiquant avec le sol, la charge M de l'armature intérieure dans le premier cas est

$$M = \frac{VS}{4\pi e}.$$

Dans le second cas, l'armature intérieure maintenue au même potentiel prend une autre charge M', la lame interposée se recouvre sur sa face interne d'une couche égale à — M' et d'une couche égale à + M' sur sa surface externe; son potentiel est égal à V', et l'on a alors

$$M' = \frac{(V - V')S}{4\pi e_1} = \frac{V'S}{4\pi e_2},$$

d'où l'on déduit

$$M' = \frac{VS}{4\pi(e_1 + e_2)} = \frac{VS}{4\pi(e - \varepsilon)}.$$

La nouvelle charge M' est donc la même que si l'on avait rapproché les armatures d'une quantité égale à l'épaisseur de la lame interposée. L'introduction d'une nouvelle lame conductrice produirait exactement le même effet.

404. Supposons maintenant que le milieu isolant soit entièrement solide et que, par suite de la polarisation, il renferme un certain nombre de couches électriques alternativement de signes contraires, de masses égales entre elles et égales aux cou-

ches répandues sur les armatures. En allant de l'armature intérieure électrisée positivement, par exemple, vers l'armature extérieure au travers du milieu isolant, on rencontrera à une certaine distance α une couche négative, une couche positive à une distance β de la première, une nouvelle couche négative à une distance α' de la seconde, puis une couche positive à une distance β', etc., et l'on a

$$e = \alpha + \beta + \alpha' + \beta' \ldots = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots + \beta + \beta' + \beta'' \ldots$$

Le phénomène électrique est le même que si toutes les épaisseurs β, β', β'' étaient formées par des lames métalliques. La charge électrique M' de l'armature intérieure est donc

$$M' = \frac{VS}{4\pi(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots)},$$

et le pouvoir inducteur spécifique du milieu considéré

$$D = \frac{M'}{M} = \frac{e}{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots}.$$

En désignant par a la somme des épaisseurs telles que α, et par b la somme des épaisseurs β, on a

$$e = a + b$$

$$D = \frac{e}{a} = \frac{a + b}{a} = 1 + \frac{b}{a}.$$

Si l'on admet maintenant que toutes les couches électriques situées dans le milieu isolant sont équidistantes, ou simplement que les deux sommes a et b sont égales, le pouvoir inducteur D sera égal à 2.

Comme l'expérience donne, en définitive, des résultats très-voisins de 2 pour tous les cas où les communications sont établies pendant quelques secondes seulement, il en résulte que les considérations qui précèdent, sans avoir la prétention d'indiquer la nature du phénomène, en donnent au moins une image satisfaisante.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE PREMIER VOLUME

CHAPITRE Ier. — PRÉLIMINAIRES.

Des phénomènes électriques. — Attractions et répulsions. 1
Conductibilité électrique. 6
Distinction des deux électricités. 11
Production simultanée des deux électricités. 15
Classification des corps au point de vue électrique. 20
Hypothèses relatives à la nature de l'électricité. 23
Théorie de Franklin. 25
Théorie de Symmer. 27
Remarques sur l'idée de fluide. 29

CHAPITRE II. — LOIS DES ACTIONS ÉLECTRIQUES.

Tentatives antérieures à Coulomb. 33
Formules relatives à la torsion des fils. 34
Expériences de Coulomb sur la torsion des fils métalliques. 38
Balance de Coulomb. 42
Méthode des oscillations. 52
Loi des quantités d'électricité. 59
Expériences postérieures à celles de Coulomb. 61

CHAPITRE III. — DÉPERDITION DE L'ÉLECTRICITÉ.

Causes de la déperdition de l'électricité. 69
Choix d'un support isolant. 69
Détermination de la loi de déperdition par l'air. 72
Recherches de M. Matteucci. 81
Expériences de M. Riess et de M. Warburg. 86

CHAPITRE IV. — DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ.

L'électricité se porte à la surface des conducteurs. 90
Conséquences théoriques de cette propriété. 97
Détermination expérimentale de la distribution de l'électricité . . . 102
Méthode du plan d'épreuve. 105
Correction de la déperdition. 110
Emploi de deux corps d'épreuve. 112
Différentes manières de déterminer le rapport des densités électriques de deux points, et le partage électrique entre deux conducteurs. . 114

Exemples de distribution de l'électricité.

Sphère et ellipsoïde. 118
Lame allongée. 119
Disque circulaire. 121
Cylindre terminé par des calottes sphériques. 122
Cube. 122
Pointes. 125
Propriétés des pointes. 125
Distribution de l'électricité sur plusieurs corps en contact. 127
Deux sphères. 127
Partage électrique entre plusieurs sphères. 133
Sphère et cylindre. 134

CHAPITRE V. — INFLUENCE ÉLECTRIQUE.

Phénomène général de l'influence. 138
Démonstration expérimentale. 139
Étincelle électrique. 143
Explication élémentaire de l'influence électrique. 144
Cas de sphères concentriques. 145
Théorème de Faraday. 146
Influence sur un conducteur déjà électrisé. 149
Expériences de Coulomb. 149
Rôle des pointes dans les phénomènes d'influence. 154
Phénomènes d'influence dans les attractions et les répulsions électriques. 156
Électroscope à feuilles d'or. 157
Phénomènes d'influence avec les corps mauvais conducteurs. 159
Pénétration de l'électricité dans les corps isolants. 165
Modification des effets d'influence par les corps interposés. 167
Pouvoir inducteur spécifique. 168
Des écrans électriques. 170
Lignes de force de Faraday. 172
Double influence. 174
Mouvements électriques produits par les pointes. 175
Électrophore. 181

Condensation électrique.

Des sources d'électricité. 186
Principe de la condensation électrique. 187
Des électricités dissimulées. 189
Force condensante. 189
Condensateur à lame isolante solide. 190
Décharge lente d'un condensateur. 191
Décharge brusque. — Résidus. 193
Découverte de la condensation. — Bouteille de Leyde. 195
Batteries électriques. 200

CHAPITRE VI. — THÉORIE DES PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES.

Définition du potentiel. — Propriété des dérivées premières. 204
Surfaces du niveau. 207
Potentiel d'une couche sphérique homogène. 208
Généralité du premier théorème. 209
Propriété des dérivées secondes du potentiel. 210
Équilibre électrique dans un système de corps conducteurs. 213
Capacités électriques. 216
Influence électrique. 220
Théorèmes généraux sur les conducteurs fermés. 222
Condensation électrique. 225
Formule de Green. 227
Bouteille de Leyde. 241
Condensateurs cylindriques. 246
Condensateurs plans. 253
De l'influence en général. — Méthode de Murphy. 254
Travail des forces électriques. 257
Énergie électrique. 258
Décharge d'une bouteille de Leyde. 261
Décharge des batteries. 262

CHAPITRE VII. — APPLICATIONS DE LA THÉORIE.

Méthode de Poisson.

Distribution de l'électricité sur deux sphères conductrices isolées. . . 269
Cas de deux sphères en contact. 272
Calcul de la densité en chaque point. 276
Recherches de M. Plana. — Capacité électrique de deux sphères en contact. 280
Cas où l'un des rayons est très-petit par rapport à la distance des deux sphères. 281
Cas général. 284
Densités électriques aux points les plus rapprochés de deux sphères voisines. — Tables de M. Plana. 287

Partage électrique entre plusieurs sphères. 289
Calculs de M. Roche relatifs au cas de deux sphères égales. 290

Des images électriques.

Surfaces de niveau de deux points électrisés. 298
Électrisation d'une sphère non isolée sous l'influence d'un point extérieur. 300
Densité de cette couche en chaque point. 301
Électrisation d'une sphère isolée sous l'influence d'un point extérieur. 302
Électrisation d'une sphère sous l'influence de plusieurs points extérieurs. 304
Action d'un point sur une sphère. 305
Équilibre d'un plan conducteur indéfini, sous l'influence d'un point électrisé. 306
Transformation des problèmes d'électricité. 308
Systèmes formés par un nombre limité d'images successives. 312
Distribution de l'électricité sur deux sphères qui se coupent à angle droit 318
Influence d'un point électrisé sur deux surfaces sphériques concentriques. 321
Distribution de l'électricité sur deux sphères extérieures l'une à l'autre 324
Distribution de l'électricité sur deux sphères en contact. 328

Comparaison des phénomènes d'électricité statique avec ceux de conductibilité électrique.

Principes de la théorie de Fourier 331
Surfaces isothermes. 334
Les surfaces isothermes sont identiques aux surfaces de niveau d'un état électrique corrélatif. 336
Démonstration directe de ce théorème par M. Thomson. 338
Conséquences de cette corrélation. 340

CHAPITRE VIII. — INSTRUMENTS D'OBSERVATION ET DE MESURES.

Classification. 341

Pendules électriques.

Pendule simple. 346
Pendule à sinus. 347
Électromètre de Henley. 348
Doubles pendules. 352
Electroscope de Cavallo. 355
Électromètre de Saussure. 354
Électroscope condensateur de Volta. 356
Électroscope à double condensation de M. Gaugain. 359

Électroscope de Péclet à trois plateaux 363
Électroscope de Behrens 365
Électromètre à feuille d'or de M. Hankel 368

Électromètres-balances.

Aréomètre électrique de Le Roy et d'Arcy 370
Bascule à décharges de Cuthbertson 371
Balances de M. Harris 372
Balance de M. Thomson 374
Électromètres absolus de M. Thomson 377

Appareils de rotation.

Aiguilles électriques 386
Électromètre d'Œrstedt 386
Électromètre de Peltier 387
Électromètre à sinus de M. Riess 388
Modifications de la balance de torsion 389
Balance de Dellmann 392
Électromètre de M. Thomson 394
Modifications de l'électromètre de M. Thomson 404
Méthodes d'oscillations 409

Électromètres à décharges.

Électromètre de Lane 413
Micromètre à étincelles 415
Mesure de la charge d'une batterie 415
Électroscope à décharges de M. Gaugain 417

Thermomètres électriques.

Thermomètre de Kinnersley 422
Thermomètre de M. Harris 423
Thermomètre de M. Riess 423
Thermomètre inscripteur 426

Galvanomètres.

Expériences de Colladon 430
Méthode de Faraday 432
Électro-dynamomètre de Weber 434

CHAPITRE IX. — EXPÉRIENCES RELATIVES A L'INFLUENCE ET A LA CONDENSATION. — CAPACITÉS ÉLECTRIQUES.

Attractions et répulsions.

Action de deux corps à distance constante 437
Influence électrique entre deux plateaux 441
Action de deux sphères 443

Capacités électriques.

Méthodes expérimentales 445
Capacité de deux sphères en contact 449
Capacité d'un cylindre droit à bases planes 450
Capacité d'un condensateur à air 451
Emploi des condensateurs à capacités variables 455
Emploi des appareils à décharges 454

Des condensateurs à air.

Détermination de la force condensante des condensateurs 454
Théorie de Biot 455
Expériences de M. Riess 457
Expériences de M. Gaugain 467
État variable des condensateurs 476

Rôle du milieu isolant dans les condensateurs.

Expériences de Faraday. — Pouvoir inducteur spécifique 479
Expériences de M. Gaugain 485
Expériences de M. Boltzmann 497
Des bouteilles de Leyde 500
Explication du pouvoir inducteur par la polarisation 502

FIN DU PREMIER VOLUME.

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1.